

3 Operatori di Fredholm

Di cosa si tratta? Introduciamo la classe degli operatori di Fredholm (anche detti operatori ad indice). Sono operatori che hanno nucleo di dimensione finita e immagine di co-dimensione finita. In altre parole, se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è un operatore di Fredholm, lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $Tx = 0$ ha dimensione finita, mentre l'equazione inhomogenea $Tx = y$ è solubile per quasi tutti y , salvo un difetto di dimensione finita.

Nel seguito, $I = I_X$ indica l'operatore **identità** $X \rightarrow X$, cioè $I(x) = x \quad \forall x \in X$.

3.1 Invertibilità di operatori

3.1 Teorema (Serie di Neumann). Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ con $\|T\| < 1$. Allora $I - T \in \mathcal{L}(X)$ è invertibile con

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots,$$

dove la serie converge (assolutamente) in $\mathcal{L}(X)$. In particolare, $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

DIMOSTRAZIONE. $\|T^k\| \leq \|T\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} T^k$ assolutamente convergente in $\mathcal{L}(X)$.

X Banach $\Rightarrow \mathcal{L}(X)$ spazio di Banach $\Rightarrow \exists S \in \mathcal{L}(X) : S_n := \sum_{k=0}^n T^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$ in $\mathcal{L}(X)$.

$\|T^k\| \leq \|T\|^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$

$$(I - T)S \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} (I - T)S_n = (I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^n) = I - T^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$$

$\Rightarrow (I - T)S = I$

Analogamente: $S(I - T) = I$

$\Rightarrow (I - T)$ invertibile, $(I - T)^{-1} = S$. ■

3.2 Corollario. Siano $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora:

$$T \text{ invertibile e } \|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \Rightarrow S + T \text{ invertibile.}$$

In particolare: $\mathcal{L}^{-1}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ invertibile}\}$ è **aperto** in $\mathcal{L}(X, Y)$.

DIMOSTRAZIONE. $S + T = T(I + T^{-1}S)$.

$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|S\| < 1 \stackrel{3.1}{\Rightarrow} I + T^{-1}S$ invertibile.

$\Rightarrow (S + T)^{-1} = (I + T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$. ■

3.3 Corollario (Continuità dell'inversione). Sia $T_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T$ in $\mathcal{L}(X, Y)$ e T e tutti T_k siano invertibili. Allora $T_k^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} T^{-1}$ in $\mathcal{L}(Y, X)$.

DIMOSTRAZIONE. $\|T_k^{-1}T\| = \|(I - T^{-1}(T - T_k))^{-1}\| \stackrel{\text{Teorema 3.1}}{\leq} \frac{1}{1 - \|T^{-1}(T - T_k)\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$

$\Rightarrow \|T_k^{-1} - T^{-1}\| = \|T_k^{-1}(T_k - T)T^{-1}\| \leq \|T_k^{-1}T\|\|T_k - T\|\|T^{-1}\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. ■

3.2 Operatori di Fredholm

3.4 Definizione. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, X, Y spazi di Banach, si dice *(operatore di) Fredholm* oppure *operatore ad indice*, se $\dim \ker T < +\infty$ e $\text{codim im } T = \dim(Y/\text{im } T) < +\infty$. Si definisce

$$\text{ind } T := \dim \ker T - \text{codim im } T. \quad (\text{indice di } T).$$

Scriviamo

$$\text{Fred}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ Fredholm}\}, \quad \text{Fred}(X) := \text{Fred}(X, X),$$

3.5 Esempio. Sia $T : \mathcal{C}^1([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ con $Tu = u'$ (derivata prima).

- $Tu = 0 \iff u' = 0 \iff u \equiv \text{const.} \Rightarrow \ker T = \{u \equiv c \mid c \in \mathbb{C}\}$ ha dimensione 1.
- Dato $v \in \mathcal{C}([a, b])$, allora $v = Tu$ con $u(x) = \int_a^x v(t) dt + \text{const} \Rightarrow T$ suriettivo.

Ne segue T Fredholm, con $\text{ind } T = 1 - 0 = 1$.

3.6 Esempio. Sia $T : \mathcal{C}_{2\pi\text{-per}}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ (funzioni 2π -periodiche) con $Tu = u'$.

Come sopra, $\dim \ker T = 1$.

$$v = u' \in \text{im } T \Rightarrow \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta = u(2\pi) - u(0) = 0.$$

$$v \in \mathcal{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \text{ con } \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta = 0 \Rightarrow u(x) := \int_0^x v(\theta) d\theta + \text{const} \text{ è } 2\pi\text{-periodica}$$

$$\Rightarrow \text{im } T = \left\{ v \in \mathcal{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \mid \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta = 0 \right\}, \quad \mathcal{C}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) = \text{im } T \oplus \{u \equiv c \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

Ne segue T Fredholm, con $\text{ind } T = 1 - 1 = 0$.

Nota (somma diretta): Sia $X \oplus Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

- (1) X, Y Banach $\Rightarrow X \oplus Y$ Banach con norma $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$;
- (2) X, Y Hilbert $\Rightarrow X \oplus Y$ Hilbert con prodotto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y.$$

3.7 Teorema (Lemma di Kato). Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $\text{codim im } T < +\infty$. Allora $\text{im } T$ è chiuso. In particolare, $T \in \text{Fred}(X, Y) \Rightarrow \text{im } T$ chiuso.

DIMOSTRAZIONE. (1) Supponiamo che T sia iniettivo.

Sia $Y = \text{im } T + Z$, $\dim Z = \text{codim im } T < +\infty \Rightarrow (Z, \|\cdot\|_Y)$ spazio di Banach.

Sia $S : X \oplus Z \rightarrow Y$, $S(x, z) = Tx + z$.

Ovviamente S è suriettivo.

S è iniettivo: $S(x, z) = 0 \Rightarrow Tx = -z \in \text{im } T \cap Z = \{0\} \Rightarrow Tx = z = 0 \Rightarrow x = z = 0$.

S è continuo: $(x_k, z_k) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow x_k \rightarrow 0, z_k \rightarrow 0 \Rightarrow S(x_k, z_k) = Tx_k + z_k \rightarrow 0$.

Dunque, $S \in \mathcal{L}(X \oplus Z, Y)$ è biiettivo.

Teorema 0.1 $\Rightarrow S^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X \oplus Z)$

$\Rightarrow (S^{-1})^{-1}(A) = S(A)$ (pre-immagine di A sotto S^{-1}) chiuso per ogni $A \subset X \oplus Z$ chiuso.

$X \times \{0\}$ chiuso in $X \oplus Z \Rightarrow S(X \times \{0\}) = T(X) = \text{im } T$ chiuso in Y .

(2) Sia $X = H$ spazio di Hilbert. Si ha allora

$$H = \ker T \oplus (\ker T)^\perp.$$

Posto $\tilde{H} := (\ker T)^\perp$, $\tilde{T} := T|_{\tilde{H}}$, segue

$\tilde{T} \in \mathcal{L}(\tilde{H}, Y)$, $\tilde{T}$ iniettivo, $\text{im } \tilde{T} = \text{im } T$.

i) $\Rightarrow \text{im } \tilde{T}$ chiuso.

(Non dimostriamo il caso in cui X è spazio di Banach.)¹ ■

3.8 Corollario. $T \in \text{Fred}(H) \Rightarrow H = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp = \text{im } T \oplus \ker T^*$ e

$$\text{ind } T = \dim \ker T - \dim \ker T^*.$$

In particolare: $T \in \text{Fred}(H)$ autoaggiunto $\Rightarrow \text{ind } T = 0$.

¹La dimostrazione è analoga, utilizzando lo spazio quoziente $\tilde{X} := X/\ker T$ con norma $\|[x]\| = \inf_{v \in \ker T} \|x + v\|_X$ dove $[x] = x + \ker T$. Allora $\tilde{X}$ è uno spazio di Banach e $\tilde{T}[x] := Tx$ definisce un operatore iniettivo $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\tilde{X}, Y)$ con $\text{im } \tilde{T} = \text{im } T$. Se X è spazio di Hilbert, $X/\ker T \cong (\ker T)^\perp$.

3.3 Proprietà fondamentali

3.9 Teorema. Per $T \in \mathcal{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) $T \in \text{Fred}(H)$;
- (2) $\exists S \in \mathcal{L}(H) \quad \exists R_0, R_1 \in \mathcal{F}(H) : \quad ST = I - R_0, \text{ e } TS = I - R_1$;
- (3) $\exists S' \in \mathcal{L}(H) \quad \exists R'_0, R'_1 \in \mathcal{K}(H) : \quad S'T = I - R'_0, \text{ e } TS' = I - R'_1$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $\Rightarrow$ (2) : $X := \ker T$ e $Y := \text{im } T$ chiusi $\Rightarrow H = X \oplus X^\perp = Y \oplus Y^\perp$.

$T_0 := T|_{X^\perp} \in \mathcal{L}(X^\perp, Y)$ biiettivo $\xrightarrow{\text{Teorema 0.1}} T_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X^\perp)$.

$S := T_0^{-1}P_Y \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow$

$$TS = TT_0^{-1}P_Y = T_0T_0^{-1}P_Y = P_Y = I - P_{Y^\perp},$$

$$ST = T_0^{-1}P_YT = T_0^{-1}T = T_0^{-1}T(P_X + (I - P_X)) = T_0^{-1}TP_{X^\perp} = T_0^{-1}T_0P_{X^\perp} = I - P_X.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : $x \in \ker T \Rightarrow 0 = STx = (I - R_0)x = x - R_0x \Rightarrow x = R_0x \in \text{im } R_0$

$\Rightarrow \ker T \subseteq \text{im } R_0$ ha dimensione finita.

$$x = R_1x + (I - R_1)x = R_1x + TSx \quad \forall x \Rightarrow H = \text{im } R_1 + \underbrace{\text{im } TS}_{\subseteq \text{im } T} = \text{im } R_1 + \text{im } T$$

$\Rightarrow \text{codim im } T \leq \dim \text{im } R_1 < +\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Immediato, poiché $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Sia $F'_0 \in \mathcal{F}(H)$ con $\|R'_0 - F'_0\| < 1$.

Teorema 3.1 $\Rightarrow A_0 := I - (R'_0 - F'_0)$ invertibile

$$\Rightarrow S'T = I - R'_0 = A_0 - F'_0 \Rightarrow (A_0^{-1}S')T = I - (A_0^{-1}F'_0)$$

$$\Rightarrow ST = I - R_0 \text{ con } S := A_0^{-1}S' \text{ e } R_0 := A_0^{-1}F'_0 \in \mathcal{F}(H).$$

Analogamente: $\exists \tilde{S} \in \mathcal{L}(H) \quad \exists \tilde{R} \in \mathcal{F}(H) : \quad T\tilde{S} = I - \tilde{R}$. Troviamo:

$$S - \tilde{S} = S - (ST + R_0)\tilde{S} = S - S(I - \tilde{R}) + R_0\tilde{S} = S\tilde{R} + R_0\tilde{S} =: F \in \mathcal{F}(H)$$

$$\Rightarrow TS = T(\tilde{S} - F) = I - \tilde{R} - TF = I - R_1 \text{ con } R_1 := \tilde{R} + TF \in \mathcal{F}(H). \quad \blacksquare$$

Esplicitamente: un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è Fredholm se e solo se è invertibile *modulo* operatori compatti (oppure di rango finito), ovvero se e solo se ammette una **paramtrix** *modulo* operatori compatti (oppure di rango finito).

3.10 Corollario. $T \in \text{Fred}(H) \Rightarrow T^* \in \text{Fred}(H)$ e $\text{ind } T^* = -\text{ind } T$.

DIMOSTRAZIONE. Teorema 3.9 $\Rightarrow T$ invertibile modulo $\mathcal{K}(H)$.

Teorema 1.5, b), Teorema 2.6, b) $\Rightarrow T^*$ invertibile modulo $\mathcal{K}(H)$.

Teorema 3.9 $\Rightarrow T^*$ Fredholm.

$$3.8 \Rightarrow \operatorname{ind} T^* = \dim \ker T^* - \dim \ker T^{**} = -(\dim \ker T - \dim \ker T^*) = -\operatorname{ind} T. \quad \blacksquare$$

3.11 Teorema. Per $T \in \mathcal{L}(H)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) $T \in \operatorname{Fred}(H)$;
- (2) $\exists m, n \in \mathbb{N}_0 \quad \exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, H) \text{ iniettivo} \quad \exists B \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}^m) :$

$$\begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} H \\ \oplus \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H \\ \oplus \\ \mathbb{C}^m \end{matrix} : \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx + Az \\ Bx \end{pmatrix},$$

è invertibile.

In questo caso $\operatorname{ind} T = m - n$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa su due risultati:

Lemma 1 (Esercizio 3.4). Siano $T_j : H_0 \rightarrow H_j$, $j = 1, 2$, lineari.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H_0 \rightarrow \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \text{ biiettivo} \iff T_2 : H_0 \rightarrow H_2 \text{ suriettivo e } T_1 : \ker T_2 \rightarrow H_1 \text{ biiettivo}.$$

Lemma 2. Siano $T \in \mathcal{L}(H)$ e U, V sottospazi chiusi di H con $\dim U < +\infty$ e $U \cap V = \{0\}$. Se $T \in \operatorname{Fred}(V, H)$ allora $T \in \operatorname{Fred}(V \oplus U, H)$ e

$$\operatorname{ind}(T : V \oplus U \rightarrow H) = \operatorname{ind}(T : V \rightarrow H) + \dim U.$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione su $n := \dim U$.

$\mathbf{n} = \mathbf{0}$: vero.

Supponiamo che l'enunciato sia vero per ogni U con $\dim U = n \in \mathbb{N}_0$.

$\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n} + \mathbf{1}$: Sia $u_1, \dots, u_{n+1}$ base di U , $U' := \langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

$$V' := V \oplus U' \Rightarrow \operatorname{ind}(T : V' \rightarrow H) = \operatorname{ind}(T : V \rightarrow H) + n.$$

Primo caso: Sia $Tu_{n+1} \in T(V')$. Otteniamo

$$\exists v' \in V' : Tv' = Tu_{n+1}$$

$$\Rightarrow T(V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle) = T(V'),$$

$$\ker(T : V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle \rightarrow H) = \ker(T : V' \rightarrow H) \oplus \langle u_{n+1} - v' \rangle^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{ind}(T : V \oplus U \rightarrow H) &= \dim \ker(T : V' \rightarrow H) + 1 - \operatorname{codim} T(V') \\ &= \operatorname{ind}(T : V' \rightarrow H) + 1 = \operatorname{ind}(T : V \rightarrow H) + n + 1. \end{aligned}$$

²Per " $\subseteq$ " si osserva: $v = v'_0 + \alpha u_{n+1} \in \ker T$ con $v'_0 \in V' \Rightarrow v = (v'_0 + \alpha v') + \alpha(u_{n+1} - v')$

Secondo caso: Sia $Tu_{n+1} \notin T(V')$. Ne segue

$$\begin{aligned} T(V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle) &= T(V') \oplus \langle Tu_{n+1} \rangle, \\ \ker(T : V' \oplus \langle u_{n+1} \rangle \rightarrow H) &= \ker(T : V' \rightarrow H) \\ \Rightarrow \operatorname{ind}(T : V \oplus U \rightarrow H) &= \dim \ker(T : V' \rightarrow H) - [\operatorname{codim} T(V') - 1] \\ &= \operatorname{ind}(T : V \rightarrow H) + n + 1. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

(1) $\Rightarrow$ (2) : $m := \dim \ker T$, $n := \operatorname{codim} \operatorname{im} T = \dim (\operatorname{im} T)^\perp$.

$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{C}^n, (\operatorname{im} T)^\perp)$, $B' \in \mathcal{L}^{-1}(\ker T, \mathbb{C}^m)$.

Con $B := B'P_{\ker T}$ vale (2) (applicare Lemma 1 con $H_0 = H \oplus \mathbb{C}^n$, $H_1 = H$, $H_2 = \mathbb{C}^m$ e $T_1 = \begin{pmatrix} T & A \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix}$).

(2) $\Rightarrow$ (1) : Lemma 1 $\Rightarrow B : H \rightarrow \mathbb{C}^m$ suriettivo, $\begin{pmatrix} T & A \end{pmatrix} : \begin{matrix} \ker B \\ \oplus \\ \mathbb{C}^n \end{matrix} \longrightarrow H$ invertibile

$\Rightarrow H = T(\ker B) \oplus A(\mathbb{C}^n)$, $T : \ker B \rightarrow H$ iniettivo.

$\Rightarrow T : \ker B \rightarrow H$ Fredholm con indice $-\dim A(\mathbb{C}^n) = -n$.

$U := (\ker B)^\perp \Rightarrow B : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ biiettivo $\Rightarrow \dim U = n$.

Lemma 2 $\Rightarrow \operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(T : \ker B \oplus U \rightarrow H) = \operatorname{ind}(T : \ker B \rightarrow H) + \dim U = m - n$. $\blacksquare$

3.12 Teorema. $\operatorname{Fred}(H)$ è un sottoinsieme *aperto* di $\mathcal{L}(H)$ e $\operatorname{ind} : \operatorname{Fred}(H) \rightarrow \mathbb{Z}$ è *localmente costante* (in particolare, continuo).

DIMOSTRAZIONE. Sia $T \in \operatorname{Fred}(H)$ e $\mathcal{T} := \begin{pmatrix} T & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ come nel Teorema 3.11.b).

Siano $\varepsilon = 1/\|\mathcal{T}^{-1}\|$, $S \in \mathcal{L}(H)$ con $\|S - T\| < \varepsilon$ e $\mathcal{S} := \begin{pmatrix} S & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Allora

$$\|\mathcal{S} - \mathcal{T}\| = \left\| \begin{pmatrix} S - T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|S - T\| < \varepsilon.$$

Corollario 3.2 $\Rightarrow \mathcal{S}$ è invertibile.

Lemma 3.11 $\Rightarrow S \in \operatorname{Fred}(H)$ con $\operatorname{ind} S = m - n = \operatorname{ind} T$. $\blacksquare$

3.13 Teorema. Valgono le seguenti proprietà.

a) Sia $T : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ continua e $T(t) \in \operatorname{Fred}(H)$ per ogni t . Allora

$$\operatorname{ind} T(0) = \operatorname{ind} T(1).$$

b) Siano $T \in \operatorname{Fred}(H)$ e $K \in \mathcal{K}(H)$. Allora $T + K \in \operatorname{Fred}(H)$ e

$$\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T.$$

DIMOSTRAZIONE. a) $t \mapsto \text{ind } T(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ è continuo e quindi costante.

b) T invertibile modulo $\mathcal{K}(H) \Rightarrow T + tK$ invertibile modulo $\mathcal{K}(H) \Rightarrow T + tK \in \text{Fred}(H)$.

Si conclude applicando il punto a) alla famiglia continua di operatori $T(t) := T + tK$. ■

3.14 Corollario. Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ e $\lambda \neq 0$. Allora $\lambda I - T \in \text{Fred}(H)$ con $\text{ind}(\lambda I - T) = 0$. Quindi, l'equazione

$$(\lambda I - T)x = y$$

ha un'unica soluzione per ogni $y \in H$, oppure l'equazione

$$(\lambda I - T)x = 0$$

ha una soluzione non-triviale ($x \neq 0$).

3.15 Teorema. $S, T \in \text{Fred}(H) \Rightarrow ST \in \text{Fred}(H)$ e $\text{ind } ST = \text{ind } S + \text{ind } T$.

DIMOSTRAZIONE. i) La composizione di operatori Fredholm è Fredholm:

T_1, T_2 invertibili modulo $\mathcal{K}(H) \Rightarrow T_1 T_2$ invertibile modulo $\mathcal{K}(H) \Rightarrow T_1 T_2 \in \text{Fred}(H)$.

ii) $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : \begin{matrix} H \\ \oplus \\ H \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H \\ \oplus \\ H \end{matrix} \text{ Fredholm} \Rightarrow$

$$\mathcal{T}(t) := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \cos(\pi t/2) & -I \sin(\pi t/2) \\ I \sin(\pi t/2) & I \cos(\pi t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(H \oplus H)$$

è continua e Fredholm per ogni t , dato che l'operatore al centro della composizione è invertibile.

Teorema 3.13.a) $\Rightarrow \text{ind} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \text{ind } \mathcal{T}(0) = \text{ind } \mathcal{T}(1) = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & -ST \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio. $T_1, T_2 \in \text{Fred}(H) \Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Fred}(H \oplus H)$ con

$$\text{ind} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} = \text{ind } T_1 + \text{ind } T_2.$$

Troviamo quindi³

$$\text{ind } S + \text{ind } T = \text{ind} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & -ST \\ I & 0 \end{pmatrix} = \text{ind} (-ST) + \text{ind } I = \text{ind } ST. \quad \blacksquare$$

³È immediato provare " T è Fredholm $\Leftrightarrow -T$ è Fredholm", e si ha $\text{ind } T = \text{ind} (-T)$.

3.4 Esercizi

Esercizio 3.1. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ nilpotente, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $T^N = 0$. Dimostrare che $I - T$ è invertibile.

Esercizio 3.2. Nei seguenti casi determinare $\dim \ker T$ e $\text{codim im } T$:

1) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b]).$

2) $T = \frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1).$

3) $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots).$

Esercizio 3.3. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Determinare l'indice di T .

Esercizio 3.4. Siano $T_j : H \rightarrow H_j$, $j = 1, 2$, lineari. Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} : H \rightarrow \begin{matrix} H_1 \\ \oplus \\ H_2 \end{matrix} \text{ biiettivo} \iff T_2 : H \rightarrow H_2 \text{ suriettivo e } T_1 : \ker T_2 \rightarrow H_1 \text{ biiettivo}.$$