4 Teoria spettrale

Di cosa si tratta? Lo *spettro* di un operatore $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach, può essere considerato come una generalizzazione dell'*insieme degli autovalori* di una matrice quadrata al caso infinito dimensionale. Consiste di tutti i valori $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda I - T$ non è invertibile. Il teorema spettrale per gli operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert generalizza il fatto che le matrici autoaggiunte sono diagonalizzabili. Determiniamo, in particolare, lo spettro degli operatori di rango finito in uno spazio di Hilbert.

4.1 Spettro e risolvente di operatori limitati

4.1 Definizione. *Sia $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach. L'insieme risolvente di T è*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ è invertibile}\}.$$

L'operatore risolvente di T è

$$R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(T).$$

Il complementare dell'insieme risolvente si chiama lo spettro di T,

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ non è invertibile}\}.$$

$\lambda \in \sigma(T)$ si dice autovalore se

$$\ker(\lambda I - T) = \{x \in X \mid Tx = \lambda x\} \neq \{0\} \qquad (\textit{autospazio di } \lambda).$$

Se $\lambda \in \sigma(T)$ non è un autovalore, allora

$$\ker(\lambda I - T) = \{0\}, \qquad \operatorname{im}(\lambda I - T) \subset X \text{ (inclusione stretta)},$$

cioè $\lambda I - T$ è iniettivo ma non suriettivo.

Definizione. Più in generale, si possono dare le seguenti definizioni:

(1) spettro puntuale: $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$ (λ è un autovalore di T).

(2) Se $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ (cioè $\lambda I - T$ è iniettivo):

   (i) spettro continuo: $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \lambda I - T$ non è suriettivo ma il suo immagine è denso in X.

   (ii) spettro residuale: $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow$ l'immagine di $\lambda I - T$ non è denso in X.

Per definizione, si ha quindi

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T).$$

4.2 Esempio. *Sia $X := \mathscr{C}([a,b])$ e $T \in \mathscr{L}(X)$ l'operatore di moltiplicazione per $h \in X$, cioè*

$$(Tf)(t) = h(t)f(t), \qquad f \in X,\ t \in [a,b].$$

T è limitato:

$$\|Tf\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |h(t)||f(t)| \leqslant \|h\|_\infty \|f\|_\infty \quad \forall\, f \in X \Rightarrow \|T\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \|h\|_\infty.$$

Per $g \in X$,

$$(\lambda I - T)f = g \iff f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - h(t)} \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Se $\lambda \notin h([a,b])$, $\frac{1}{\lambda - h} \in C([a,b])$ e $\lambda I - T$ è biiettivo.
Sia $\lambda \in h([a,b])$. Se $g = 1$, f non appartiene a $C([a,b])$; quindi $\lambda I - T$ non è suriettivo.
Pertanto,

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \exists\, t \in [a,b]: \quad h(t) = \lambda \iff \lambda \in h([a,b]).$$

Per $\lambda \in \rho(T)$, l'inverso $(\lambda I - T)^{-1}$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $\frac{1}{\lambda - h}$.

Esempio. Siano $X = L^2([a,b])$ e $T : X \to X$ definito da $(Tf)(x) = x \cdot f(x)$ (cioè T è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $h(x) = x$).

$$C := \max\{|a|,|b|\} \Rightarrow |(Tf)(x)| \leqslant C|f(x)| \quad \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \|T\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant C.$$

Per $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(x - \lambda)\, f(x) = 0 \text{ q.o. } [a,b] \Rightarrow f(x) = 0 \text{ q.o. } [a,b] \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow \ker(\lambda I - T) = \{0\},$$

cioè $\lambda I - T$ è sempre iniettivo. Per $g \in X$,

$$(\lambda I - T)f = g \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{\lambda - x}, \quad \text{q.o. } [a,b].$$

Se $\lambda \notin [a,b]$, $\frac{1}{\lambda - x}$ è continua su $[a,b]$ e quindi f è ben definita ed appartiene a X. Quindi $\lambda I - T$ è suriettivo e $\lambda \in \rho(T)$.

Sia allora $\lambda \in [a,b]$. Se $g \equiv 1$, f non appartiene ad X; quindi $\lambda I - T$ non è suriettivo. Ma se $g \equiv 0$ in un intorno di λ in $[a,b]$, f è ben definita ed appartiene a X. Tali g sono dense in X. Infatti, posto, per $n \gg 1$, $g_n = g \cdot \left[1 - \chi_{(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n})}\right]$, χ_E funzione caratteristica di $E \subseteq \mathbb{R}$, $g \in X$, si ha $g_n \equiv 0$ in un intorno di λ, $g_n \in X$, e, per il Teorema della Convergenza Dominata, $\|g_n - g\|_X \xrightarrow{n \to +\infty} 0$. Pertanto, $\operatorname{im}(\lambda I - T)$ è densa in X. Concludiamo che $\lambda \in \sigma_c(T)$ per ogni $\lambda \in [a,b]$ e quindi $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [a,b]$.

4.3 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(X)$, X Banach. Allora*

a) $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ *è aperto*, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ *è chiuso. Inoltre*

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|T\|\}.$$

b) $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geqslant \dfrac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$ *per ogni* $\lambda \in \rho(T)$.

Dimostrazione. Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\varepsilon := 1/\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|$.

$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T) + (\lambda - \lambda_0)I = (\lambda_0 I - T)\big(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\big)$

$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \Rightarrow \|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}\| < 1$

$\overset{3.2}{\Rightarrow} \lambda I - T$ invertibile $\forall\, \lambda \in U_\varepsilon(\lambda_0)$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T) \Rightarrow \begin{cases} \rho(T) \text{ aperto, } \sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T) \text{ chiuso,} \\ \operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T)) \geqslant \varepsilon = 1/\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\| \end{cases}$$

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|T/\lambda\| < 1 \overset{3.2}{\Rightarrow} (\lambda I - T) = \lambda(I - T/\lambda)$ invertibile. ∎

4.4 Esempio. *a) Sia* $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *definito da* $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

Allora $0 \in \sigma_r(T)$ *perché* $\ker(0 \cdot I - T) = \ker T = \{0\}$ *e* $\operatorname{im}(0 \cdot I - T) = \operatorname{im} T = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x_1 = 0\}$ *non è densa in* $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Sia $T \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *definito da* $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3 \ldots)$.

Allora $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ *e* λ *è un autovalore se e solo se* $|\lambda| < 1$. *Infatti:*

$\|T\| = 1 \Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{|\lambda| \leqslant 1\}$

$(x_2, x_3 \ldots) = T(x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots) \iff (x_1, x_2, x_3 \ldots) = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$

$(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in \ell^2 \iff \sum_j |\lambda|^{2j} < +\infty \iff |\lambda|^2 < 1 \iff |\lambda| < 1$ (*serie geometrica*).

$$\left.\begin{array}{l} \{|\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(T) \\ \sigma(T) \text{ chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(T) = \{|\lambda| \leqslant 1\}$$

4.5 Teorema. $T \in \mathscr{L}(H)$ *autoaggiunto* $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$.

$\Rightarrow \|(\lambda I - T)x\|^2 = (\alpha x + i\beta x - Tx, \alpha x + i\beta x - Tx) = \|\alpha x - Tx\|^2 + \|\beta x\|^2$.

$\Rightarrow \|(\lambda I - T)x\| \geqslant |\beta|\|x\| \quad \forall\, x \in H$.

$\Rightarrow \lambda I - T$ iniettivo.

$\operatorname{im}(\lambda I - T)$ è chiuso: Sia $y_k = (\lambda I - T)x_k \to y$.

$\|x_k - x_\ell\| \leqslant \frac{1}{|\beta|}\|(\lambda I - T)(x_k - x_\ell)\| = \frac{1}{|\beta|}\|y_k - y_\ell\|. \Rightarrow (x_k)$ successione di Cauchy

$\Rightarrow \exists\, x \in H: \quad x_k \to x \Rightarrow y = \lim_{k\to+\infty}(\lambda I - T)x_k = (\lambda I - T)x \Rightarrow y \in \operatorname{im}(\lambda I - T)$.

$\lambda I - T$ normale:

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^* = (\lambda I - T)(\bar{\lambda} I - T) = (\bar{\lambda} I - T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)^*(\lambda I - T)$$

$\Rightarrow (\operatorname{im}(\lambda I - T))^\perp = \ker(\lambda I - T)^* \overset{1.7,b)}{=} \ker(\lambda I - T) = \{0\}$.

$\Rightarrow H = \{0\}^\perp = (\operatorname{im}(\lambda I - T))^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - T)} = \operatorname{im}(\lambda I - T)$.

$\Rightarrow \lambda I - T$ invertibile. ■

4.6 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due autovalori di T. Allora:*

$$u_1 \in \ker(\lambda_1 I - T),\ u_2 \in \ker(\lambda_2 I - T) \Rightarrow u_1 \perp u_2.$$

Dimostrazione. Grazie al fatto che $T = T^*$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, troviamo

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (Tu_1, u_2) = (u_1, Tu_2) = \lambda_2(u_1, u_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Pertanto, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0$. ■

4.2 Lo spettro degli operatori compatti autoaggiunti

La teoria spettrale per operatori compatti autoaggiunti si basa sul seguente risultato:

4.7 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{L}(H)$ autoaggiunto. Valgono:*

a) *Almeno uno dei valori $-\|T\|$ o $\|T\|$ appartiene a $\sigma(T)$.*

b) *Se $T \in \mathscr{K}(H)$ allora almeno uno dei valori $-\|T\|$ o $\|T\|$ è un autovalore di T.*

Dimostrazione: Il caso $T = 0$ è banale, quindi assumiamo $\|T\| > 0$.

Teorema 1.8: $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

$\Rightarrow \exists\,(x_n) \subseteq H : \|x_n\| = 1\ \forall\, n$ e $|(Tx_n, x_n)| \xrightarrow{n\to+\infty} \|T\|$.

$(Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \Rightarrow$ Spdg[4] $(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \alpha \neq 0$ con $\alpha = -\|T\|$ o $\alpha = \|T\|$ (altrimenti passiamo ad una sottosuccessione).

$0 \leqslant \|(T - \alpha I)x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\alpha(Tx_n, x_n) + \alpha^2 \leqslant 2\alpha^2 - 2\alpha(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Rightarrow \|(T - \alpha I)x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

a) Supponiamo $\alpha \in \rho(T)$. Allora $1 = \|x_n\| \leqslant \|(T - \alpha I)^{-1}\|\|(T - \alpha I)x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ↯

[4] Senza perdere di generalità.

b) T compatto $\Rightarrow$ Spdg $\exists\, y \in H: \quad Tx_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$
(altrimenti passiamo ad una sottosuccessione)
$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\alpha}\Big((\alpha I - T)x_n + Tx_n\Big) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}y$
$\Rightarrow y \xleftarrow{n\to+\infty} Tx_n \xrightarrow{n\to+\infty} T\Big(\frac{1}{\alpha}y\Big) = \frac{1}{\alpha}Ty \Rightarrow Ty = \alpha y.$
$|\alpha| = \|\alpha x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} \|y\| \Rightarrow \|y\| = |\alpha| > 0 \Rightarrow y \neq 0.$ ∎

4.8 Teorema (Teorema spettrale)**.** *Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e* $\dim H = +\infty$*. Allora*

$$\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$$

con un numero finito o infinito di autovalori reali $\lambda_k \neq 0$ con autospazi $V_k := \ker(\lambda_k I - T)$ di dimensione finita. Nel caso di un numero infinito di autovalori, $\lambda_k \xrightarrow{k\to+\infty} 0$. Unendo le base ortonormali di $\ker T$ e di tutti i V_k, si ottiene una base ortonormale di H.

Dimostrazione. Notiamo:

- Teorema 4.5: $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
- $0 \in \sigma(T)$ perché altrimenti $I = T^{-1}T \in \mathscr{K}(H)$ ↯ (Corollario 2.9)
- $0 \neq \lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda$ autovalore con $\dim\ker(\lambda I - T) < +\infty$ (per l'Alternativa di Fredholm).

Ci serve il seguente

> **Lemma.**[5] Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto e V un sottospazio di H con $T(V) \subseteq V$. Allora $T(V^\perp) \subseteq V^\perp$ e $T|_{V^\perp} \in \mathscr{K}(V^\perp)$ autoaggiunto con $\|T|_{V^\perp}\| \leqslant \|T\|$.

Teorema 4.7 $\Rightarrow \exists\, \lambda_1 \in \{-\|T\|, \|T\|\}: \quad V_1 = \ker(\lambda_1 I - T) \neq \{0\}$.
Abbiamo $H = V_1 \oplus H_1$ con $H_1 := V_1^\perp$ e $T(V_1) \subseteq V_1$.
Lemma $\Rightarrow T_1 := T|_{H_1} \in \mathscr{K}(H_1)$ autoaggiunto, $\|T_1\| \leqslant \|T\|$.
Supponiamo $T_1 \neq 0$.
Teorema 4.7 $\Rightarrow \exists\, \lambda_2 \in \{-\|T_1\|, \|T_1\|\}: \quad \ker(\lambda_2 I - T_1) \neq \{0\}$.
$\lambda_2 \neq \lambda_1$ perché altrimenti

$$\ker(\lambda_2 I - T_1) = \ker(\lambda_1 I - T_1) \subseteq H_1 \cap \ker(\lambda_1 I - T) = V_1^\perp \cap V_1 = \{0\} ↯ .$$

Teorema 4.6 $\Rightarrow \ker(\lambda_2 I - T) \subseteq V_1^\perp = H_1 \Rightarrow \ker(\lambda_2 I - T_1) = V_2$.
Abbiamo $H_1 = V_2 \oplus H_2$ con $H_2 := V_2^\perp$ (complementare in H_1) e $T_2 := T|_{H_2}$.
Nota che $H = V_1 \oplus H_1 = (V_1 \oplus V_2) \oplus H_2$, cioè $H_2 = (V_1 \oplus V_2)^\perp$ (complementare in H).
Iterazione di questo procedimento genera una successione (che, eventualmente, assume solo una quantità finita di valori distinti) di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, diversi tra di loro con

[5] Veda Esercizio 2.2.

(i) $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots > 0$

(ii) $V_n = \ker(\lambda_n I - T)$, $H_n = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)^\perp$ e $\lambda_{n+1} = \pm \|T|_{H_n}\|$.

Si verifica necessariamente una delle due situazioni trattate di seguito.

Primo caso: La procedura si ferma, cioè $T|_{H_n} = 0$ per un $n \in \mathbb{N} \Rightarrow H_n \subseteq \ker T$.

$x \in \ker T$ e $y \in V_k \Rightarrow \lambda_k(y,x) = (Ty,x) = (y,Tx) = 0 \overset{\lambda_k \neq 0}{\Rightarrow} x \perp V_k$

$\Rightarrow \ker T \subseteq (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n)^\perp = H_n$.

$\Rightarrow H_n = \ker T$ e $H = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \oplus \ker T$.

Secondo caso: La procedura non si ferma.

$\Rightarrow \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad x_n \in V_n,\ \|x_n\| = 1.$

$T \in \mathscr{K}(H) \overset{\text{Teorema 2.8}}{\Rightarrow} \exists$ sottosuccessione convergente (Tx_{n_k}).

$Tx_n = \lambda_n x_n$ e $x_n \perp x_m$ per $n \neq m \Rightarrow \lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_\ell}^2 = \|Tx_{n_k} - Tx_{n_\ell}\|^2 \xrightarrow{k,\ell\to+\infty} 0$

$$\left.\begin{array}{l} (|\lambda_n|) \text{ decrescente, quindi convergente} \\ |\lambda_{n_k}| \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Rightarrow \lambda_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Sia $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ottenuta dall'unione delle basi di tutti i V_k e sia $\widetilde{H} = \overline{\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}}$.

Come sopra: $\ker T \subseteq \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}^\perp = \widetilde{H}^\perp$.

Sia $x \in \widetilde{H}^\perp$.

$\Rightarrow x \in V_n^\perp = H_n$ per ogni n e $\|Tx\| = \|T|_{H_n} x\| \leqslant \|T|_{H_n}\| \|x\| = |\lambda_{n+1}| \|x\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Rightarrow x \in \ker T$.

Concludiamo quindi che $\ker T = \widetilde{H}^\perp$ e $H = \widetilde{H} \oplus \ker T$. ■

4.9 Esempio. *Sia $T \in \mathscr{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ con $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Ovviamente 0 non è un autovalore. Gli autovalori sono $1, 1/2, 1/3, \ldots$ con autovettori $e_1, e_2, e_3, \ldots$.*

4.10 Corollario. *Sia $T \in \mathscr{K}(H)$ autoaggiunto. Allora H ha una base ortonormale di autovettori $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Se $Tx_j = \lambda_j x_j$ per ogni j, allora*

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j \qquad \forall\, x \in H \qquad (\textit{forma diagonale di } T).$$

Il teorema spettrale rimane parzialmente valido per un operatore compatto non autoaggiunto oppure in uno spazio di Banach: lo spettro è numerabile ed è composto da 0 e solo autovalori con autospazi di dimensione finita. 0 è l'unico eventuale punto di accumulazione.

4.3 Lo spettro degli operatori di rango finito

Un operatore $T \in \mathscr{L}(H)$ di rango finito $n \geqslant 1$ ha la forma

$$\boxed{Tx = \sum_{j=1}^{n} (x, y_j) x_j \qquad \forall\, x \in H}$$

con $x_j, y_j \in H$. Supponiamo che sia $x_1, \ldots, x_n$ sia $y_1, \ldots, y_n$ siano linearmente indipendenti.[6] Allora

$$\operatorname{im} T = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \qquad \ker T = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle^{\perp}.$$

Determiamo gli altri autovalori. Gli autovettori appartengono necessariamente a $\operatorname{im} T$. Dobbiamo quindi studiare

$$T : \operatorname{im} T \longrightarrow \operatorname{im} T.$$

Possiamo utilizzare tutti i mezzi dell'algebra lineare. La rappresentazione di T rispetto alla base $x_1, \ldots, x_n$ di $\operatorname{im} T$ è la matrice

$$\mathbf{T} := (\mathbf{t}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = ((x_j, y_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_n, y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1, y_n) & \cdots & (x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di T sono quelli di $\mathbf{T}$ che corrispondono agli zeri del polinomio caratteristico. Risulta

$$\boxed{\sigma(T) = \{0\} \cup \{\text{autovalori di } \mathbf{T}\} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\},}$$

dove i λ_j non devono essere necessariamente diversi fra di loro (in caso di zeri di molteplicità piu grande di 1). Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ è un autovettore di $\mathbf{T}$ per l'autovalore λ_k, allora $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ soddisfa $Tx = \lambda_k x$.

4.11 Esempio. *Sia T un operatore integrale in $A \subset \mathbb{R}^N$ con nucleo $k(x, y) = \sum_{j=1}^{n} r_j(x) \overline{s_j(y)}$,*

$$(Tf)(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j(x) \int_A f(y) \overline{s_j(y)}\, dy, \qquad x \in A.$$

Supponiamo che $r_1, \ldots, r_n$ e $s_1, \ldots, s_n$ siano linearmente indipendenti. Gli autovalori di T sono 0 e gli autovalori della matrice $(\mathbf{t}_{ij})$ con

$$\mathbf{t}_{ij} = \int_A r_j(x) \overline{s_i(x)}\, dx.$$

[6] Questo non è una limitazione: Secondo Lemma 2.2, dato $T \in \mathscr{F}(H)$, possiamo scegliere gli x_i come base ortogonale di $\operatorname{im} T$ e $y_i := T^* x_i$. $\sum_i \alpha_i y_i = 0$ implica $\sum_i \alpha_i x_i \in \ker T^* = (\operatorname{im} T)^{\perp}$. Allora $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ e quindi $\alpha_i = 0$ per tutti i.

Per $\lambda \notin \sigma(T)$ esiste $(\lambda I - T)^{-1}$. Sia data $y \in H$. Cerchiamo $x \in H$ con

$$(\lambda I - T)x = y \iff \lambda x - Tx = y \iff \lambda x - \sum_{j=1}^{n} (x, y_j) x_j = y.$$

Passando al prodotto interno con y_i per tutti gli i, troviamo il sistema

$$\lambda(x, y_i) - \sum_{j=1}^{n} (x, y_j)(x_j, y_i) = (y, y_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

In forma matriciale questo significa

$$(\lambda I - \mathbf{T}) \begin{pmatrix} (x, y_1) \\ \vdots \\ (x, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, y_1) \\ \vdots \\ (y, y_n) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} (x, y_1) \\ \vdots \\ (x, y_n) \end{pmatrix} = (\lambda I - \mathbf{T})^{-1} \begin{pmatrix} (y, y_1) \\ \vdots \\ (y, y_n) \end{pmatrix}.$$

Quindi, definendo

$$\begin{pmatrix} b_1(y, \lambda) \\ \vdots \\ b_n(y, \lambda) \end{pmatrix} := (\lambda I - \mathbf{T})^{-1} \begin{pmatrix} (y, y_1) \\ \vdots \\ (y, y_n) \end{pmatrix},$$

troviamo la soluzione

$$\boxed{(\lambda I - T)^{-1} y = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} b_j(y, \lambda) x_j.}$$

4.12 Esempio. *Con la notazione dell'Esempio 4.11 e $g \in L^2(A)$ troviamo*

$$[(\lambda I - T)^{-1} g](x) = \frac{g(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} b_j(g, \lambda) r_j(x).$$

4.13 Esempio. *Studiare, in $L^2([0, 2\pi])$, l'equazione integrale*

$$\lambda f(x) - \int_0^{2\pi} k(x, y) f(y)\, dy = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

dove $k(x, y) = \sin x \sin y + 2 \cos x \cos y$. Nella notazione introdotta sopra, $n = 2$ e

$$r_1(x) = s_1(x) = \sin x, \quad r_2(x) = s_2(x) = \sqrt{2} \cos x.$$

In particolare, l'operatore $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} k(x, y) f(y)\, dy$ è autoaggiunto.

Calcoliamo $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}$, che ha autovalori π e 2π, con rispettivi autospazi $\langle (1, 0) \rangle$ e $\langle (0, 1) \rangle$. Risulta $\sigma(T) = \{0, \pi, 2\pi\}$ con

$$\ker T = \langle s_1, s_2 \rangle^{\perp}, \quad \ker(\pi I - T) = \langle s_1 \rangle, \quad \ker(2\pi - T) = \langle s_2 \rangle.$$

Per $\lambda \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ *calcoliamo*

$$\begin{pmatrix} b_1(g,\lambda) \\ b_2(g,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda-\pi) & 0 \\ 0 & 1/(\lambda-2\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g,s_1)_{L^2} \\ (g,s_2)_{L^2} \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} f(x) = [(\lambda I - T)^{-1} g](x) &= \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{(g,s_1)_{L^2}}{\lambda(\lambda-\pi)} \sin x + \frac{\sqrt{2}(g,s_2)_{L^2}}{\lambda(\lambda-2\pi)} \cos x \\ &= \frac{1}{\lambda} g(x) + \frac{\sin x}{\lambda(\lambda-\pi)} \int_0^{2\pi} g(y) \sin y \, dy + \frac{2\cos x}{\lambda(\lambda-2\pi)} \int_0^{2\pi} g(y) \cos y \, dy. \end{aligned}$$

4.4 Esercizi

Esercizio 4.1. *Sia* $T : \mathscr{C}([-1,1]) \to \mathscr{C}([-1,1])$ *l'operatore di moltiplicazione per la funzione* $h \in \mathscr{C}([-1,1])$*, cioè* $(Tf)(x) = h(x)f(x)$*. Nei seguenti casi calcolare spettro, autovalori e autofunzioni di* T *:*

a) $h(x) = 2x$.

b) $h(x) = 0$ *per* $x \leqslant 0$, $h(x) = x$ *per* $x > 0$.

Esercizio 4.2. *Sia* $T \in \mathscr{L}(H)$*. Dimostrare:*

a) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) T *unitario* $\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Esercizio 4.3. *Sia* $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ *con* $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$*. Dimostrare che* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ *e che* T *non ha nessun autovalore.*

Esercizio 4.4. *Determinare autovalori, autofunzioni e risolvente degli operatori integrali in* L^2 *con nucleo* k *:*

a) $k(x,y) = xy$ *in* $[0,1]$,

b) $k(x,y) = xy + x^2y^2$ *in* $[-1,1]$,

c) $k(x,y) = x - y$ *in* $[0,1]$.

Trovare la soluzione f *in* L^2 *della seguente equazione integrale:*

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin y \, f(y) \, dy - f(x) = x$ *in* $[0, 2\pi]$.

Esercizio 4.5. *Siano* $T \in \mathscr{L}(H)$ *e* $\lambda, \mu \in \rho(T)$*. Dimostrare che*

$$R(\mu, T) - R(\lambda, T) = (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$