

Coesologie di fasci.

①

Il modo più generale di costruire la coesologie di fasci è tramite i funtori derivati.

Se $\mathcal{C}$ è una "CATEGORIA ABELIANA", ci interessano in particolare:

- la categoria $\text{Ab}(X)$ dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio top. X
- la categoria $\text{Mod}(X)$ dei fasci di $\mathcal{O}_X$ -moduli su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$

In una categoria abeliana:

- Vogliamo A, B , $\text{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano
- la composizione rispetto a operatori di gruppo
- esistono nuclei e conuclei su cui si può parlare di immagine, immagine, quoziente, esattezza

Consideriamo un oggetto I e il funtore

$$\text{Hom}(\cdot, I): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}.$$

→ è covariante: $A \xrightarrow{f} B$

è additivo

$$\text{Hom}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(A, I)$$

$$\text{con } f \mapsto f \circ g$$

→ è esatto a sinistra:

$$\text{se } 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0 \text{ è}$$

esatto in $\mathcal{C}$,

$$\text{allora } 0 \rightarrow \text{Hom}(C, I) \rightarrow \text{Hom}(B, I) \rightarrow \text{Hom}(A, I)$$

è esatto

(si verifica ~~facilmente~~ per esercizio)

Diciamo che I è un oggetto iniettivo e
 $\text{Hom}(0, I)$ è esatto.

Una RISOLUZIONE INIETTIVA di un oggetto B
 A di $\mathcal{C}$ è un complesso $\{I^i\}_{i \geq 0}$, con
un morfismo $\varepsilon: A \rightarrow I^0$, t.c. ogni I^i è
iniettivo, e lo m.c.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

è esatto.

Diciamo che $\mathcal{C}$ HA ABBASTANZA INIETTIVI
se ogni $\forall A$ oggetto $\exists \varepsilon: A \rightarrow I$ iniettivo
con I iniettivo.

• Se $\mathcal{C}$ ha abbastanza iniettivi, allora ogni
oggetto ha una risolut. iniettiva

$$(A \rightarrow I_0 \rightarrow \frac{I_0}{A} \hookrightarrow I_1 \text{ ecc.})$$

• Fatto: due risoluti iniettive sono sempre
omotop. equivalenti.

• Fatto: se A è un anello, la categoria degli
 A -moduli ha abbastanza iniettivi.

Coroll. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spaz. anellato, allora
 $\text{Mod}(X)$ ha abbastanza iniettivi.

Def. Se $\mathcal{F}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$ -moduli.
IDEA DELLA DIM.

$\forall x \in X. \mathcal{F}_x \quad \mathcal{O}_{X,x}$ -modules

②

$\rightarrow \mathcal{F}_x \hookrightarrow \mathcal{G}_x \quad \mathcal{O}_{X,x}$ -modules iniettivi

Si definisce allora $\mathcal{G} = \prod_{x \in X} j_x(\mathcal{F}_x)$

e si verifica che $\mathcal{G}$ è
iniettivo e $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

$j = \{j_x\} \hookrightarrow X$.

Coroll. Se X è uno spazio top., allora $\text{Ab}(X)$
è abbastanza iniettivo.

[BIM] Sia $\mathcal{O}_x$ il fascio costante uguale a $\mathbb{Z}$.
Allora $\text{Mod}(X) = \text{Ab}(X)$.

Sia ora X uno spazio top. *

$$\Gamma(X, \cdot) : \text{Ab}(X) \rightarrow \text{Ab}$$

funzione spaziale globale

• è esatta e sinistra:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad \text{esatta}$$

$$\rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0 \quad \text{esatta}$$

$$H^i(X, \cdot) : \text{Ab}(X) \rightarrow \text{Ab}$$

sono i funtori derivati a destra
di $\Gamma(X, \cdot)$, cioè: dato $\mathcal{F}$

sia $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{H}$ una risoluzione iniettiva
di $\mathcal{F}$ (~ fasci)

consideriamo il complesso delle spaziali
globali:

$$H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

Lo com. $H^i(X, \mathcal{F})$ è la coomologia di

questo complesso.

- $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$
- $H^i(X, \mathcal{F})$ non dipende dalle scelte delle risoluzioni, iniettive (o meno di iniezione naturale di fibrati)
- c'è una succ. esatta lunga in cohom. associata ad ogni ^{mult.} esatta corte di fibrati
- ogni risoluzione corta di $\mathcal{F}$ calcola le coomologie di $\mathcal{F}$.

Def un fascio $\mathcal{F}$ è detto **FLASQUE** (fiacco?)

se l'inclusione di aperti $V \subset U$,
la restrizione $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ è suriettiva.

• un fascio iniettivo è flasque

• un fascio flasque è suriettivo:

(DIM) Sia $\mathcal{F}$ un fascio flasque, e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$ iniettivo.

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0 \quad \text{esatta}$$

Entrambi flasque

allora anche $\mathcal{H}$ è flasque

(vd Hartshorne ex II. 1.16)

se $\mathcal{F}$ è fiacco, la succ. delle sezioni globali è esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{G}(U) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \mathcal{H}(U) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{suriettiva} \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G}(V) & \rightarrow & \mathcal{F}(V) & \rightarrow & \mathcal{H}(V) \rightarrow 0 \end{array}$$

è sur.

Inoltre siccome la m.c. delle sez. globali
esatte, dalla m.c. esatta Cech in coom. si
deduce $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$. (3)

• $\mathcal{F}$ moltiplo $\rightarrow$ aciclico

$$\rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{F}) \quad \forall i \geq 2$$

$\rightarrow$ n.b. indet. m.c.

~ Le ulteriori proprietà valgono per coom. dei
fasci.

Limitazioni: di Grothendieck dim. coom. coesa

1) Teorema Sia X uno spazo top. metrizzabile,
di dimensione n . Per ogni fascio $\mathcal{F}$
di gruppi ab. su X si ha:

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n.$$

ES Sia $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$

$p, q \in X$ punti diversi distinti

2) Teorema Sia X uno scheme affine -
~~metrizzabile~~ Per ogni fascio $\mathcal{F}$ quasi-cohente
su X ~~coesa~~ è aciclico.

(in effetti, se X è metrizzabile, vale anche
il numero $\rightarrow$ coom. generalizzabile
degli scheme affini).

Relazione con le coor. d'Beck.

X sp. Top. $U = \bigcup_{i=1}^r U_i \in \mathcal{C}$ formano un ordinamento totale

$$\mathcal{O}^p(U, \mathcal{F}) := \prod_{i \in \mathcal{C} \cdot U_i^p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \cong \mathcal{O}^p(I)$$

$$\simeq H^p(U, \mathcal{F})$$

• Se $\mathcal{F}$ è flasque, $\forall U$ si ha $H^p(U, \mathcal{F}) = 0$
 $\forall p > 0$.

• $\forall p \geq 0$ c'è una mappa naturale

$$H^p(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

Teorema Sia X uno schema noetheriano

e separato. Sia U un comp. aperto

affine di X , e $\mathcal{F}$ un fascio quasi-coerente su X . Allora $\forall p \geq 0$ si ha:

$$H^p(U, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \mathcal{F}).$$

Pf Per $p=0$ sono le sez. globali.

Fatto: $\exists \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \supseteq$ fascio quasi-coerente flasque

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow 0$$

$\mathcal{R}$ è
anchora
quasi-
coerente.

Nota: $\forall i \in \mathcal{C} \cdot U_i^p$

$U_{i_0, \dots, i_p}$ intersec. di aperti
affini su X separato $\rightarrow$ è affine

(4)

$$\Rightarrow H^1(U_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = 0$$

$\Rightarrow$ la successione:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{\text{ét}}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{\text{ét}}) \rightarrow \mathcal{R}(U_{\text{ét}}) \rightarrow 0$$

è esatta

$\Rightarrow$ la successione:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^P(U, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{O}^P(U, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{O}^P(U, \mathcal{R}) \rightarrow 0$$

è esatta, e dà un morfismo
di complessi (compatibile con
i cobordi)

$\Rightarrow$ otteniamo una successione esatta lunga
per le coomologie di Čech:

$$\dots \rightarrow H^p(U, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(U, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^p(U, \mathcal{R})$$

$$\rightarrow \check{H}^{p+1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

ma: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow$ ciclico anche per coomologie di Čech

$$\Rightarrow \check{H}^p(U, \mathcal{R}) \cong \check{H}^p(U, \mathcal{F}) \quad \forall p \geq 2$$

$$\text{e: } 0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X) \rightarrow \check{H}^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Ma abbiamo anche, dalla successione esatta lunga in
coomologie di Čech:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \check{H}^1(U, \mathcal{G}) \cong H^1(X, \mathcal{G}).$$

Facciamo per induzione in i :

$\forall p \geq 2$ abbiamo

$$\check{H}^{p-1}(U, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^{p-1}(U, \mathcal{G})$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} \text{iso per} \\ \text{HP INVARIA} \\ (\mathcal{R} \text{ coerente}) \end{array} & \downarrow & \downarrow \\
 \check{H}^{p-1}(X, \mathcal{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^p(X, \mathcal{G}) \\
 & \nearrow & \text{iso per H.C.} \\
 & & \text{ESTATA LUNGA IN} \\
 & & \text{COOM.} \\
 & & (\mathcal{G} \text{ flasque} \\
 & & \rightarrow \text{occluso}).
 \end{array}$$

Teorema:

Teorema Sia X uno spazo top. e $\mathcal{G}$ un
fascio di gruppi ab. Allora

$$H^1(X, \mathcal{G}) \cong \underbrace{\check{H}^1(X, \mathcal{G})}_{\text{coante diretto}}$$

Geometria dello spazio proiettivo.

A anello noetheriano

$$S = A[x_0, \dots, x_r] \quad X = \text{Proj } S = \mathbb{P}_A^r$$

$\mathcal{O}_X(1)$ fascio inv. su X

Teoremi.

(a) $S \cong \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(u))$ is di S -moduli prodotti

(b) $H^i(X, \mathcal{O}_X(u)) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{Z}, \quad i \neq 0, i \neq r$

(c) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$

(d) abbiamo un perfect pairing:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(u)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-u-r-1))$$

come A -moduli liberi
e f.g., $\forall u \in \mathbb{Z}$.

$$\longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$$

(in questo permette di dedurre la dim.
di $H^r(X, \mathcal{O}_X(u)) \quad \forall u$.

~~Nota: $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall i > r = \dim X$.~~

DIM. Oss. anzitutto che se X è uno scheme
su un anello A , $\forall \mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$ -modulo $H^i(X, \mathcal{F})$
è naturalmente un A -modulo.

Definiamo $\mathcal{F} := \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(u)$ fascio max
coerente

e ne calcoliamo le coomologie; oss. che

$$H^i(X, \mathcal{Y}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^i(X, \mathcal{O}_X(n))$$

in base ai ricorrenze del
grading

(NB coomologie
commute con
somme dirette).

Sia $U_i := D_+(x_i) \quad \forall i=0, \dots, r$

Allora $U = \bigcup U_i$, U e $\mathcal{Y}$ è un ricop. aperto affine
di $X \Rightarrow H^i(X, \mathcal{Y}) \cong \tilde{H}^i(U, \mathcal{Y})$.

Dati $i_0, \dots, i_p$ abbiamo

$$U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \quad \underline{\text{affine}}$$

$$D_+(x_{i_0} \dots x_{i_p})$$

Ricordiamo che:

se M è un S -modulo graduato

$$M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d \quad \text{con} \quad S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$$

allora $M(t)$ è il modulo con gradazioni
shiftate: $(M(t))_d = M(t+d)$

e se $\mathcal{Y} = \widetilde{M}$, si ha:

$$\forall f \text{ omogeneo} \quad \widetilde{M}(D_+(f)) = \widetilde{M}(f)$$

Inoltre: $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X(n)(U_{i_0 \dots i_p}) = (S(n) x_{i_0} \dots x_{i_p})_0$$

Oss. che $\underbrace{x_0^{a_0} \dots x_r^{a_r}}_{x_0^{b_0} \dots x_r^{b_p}} \xrightarrow{\text{deg. grad. } \sum a_i = n \text{ in } S(n)} \text{deg. grad. } \sum b_i = n \text{ in } S(n) x_{i_0} \dots x_{i_p}$

oss: $\sum a_i - n = \sum b_i$

oss: deg. grad. n in $S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}}$

$$\rightarrow (S(u)_{x_0 \dots x_r})_0 = (S_{x_0 \dots x_r})_m$$

$$\rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_r}) = S_{x_{i_0 \dots i_r}} \quad \text{con grad. standard.}$$

il complesso di Čech è quindi dato da:

$$0 \rightarrow \check{\mathcal{C}}^0(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{\mathcal{C}}^1(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \check{\mathcal{C}}^r(U, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \prod_{i=0}^r S_{x_i} \quad \quad \quad \prod_{0 \leq i < j \leq r} S_{x_i x_j} \quad \quad \quad S_{x_0 \dots x_r}$$

Oss. che: x_i non sono divisori dello zero in S

$\Rightarrow$ le mappe di localizzazione

$$S \rightarrow S_{x_i} \rightarrow S_{x_i x_j} \quad \text{ecc. sono iniezioni}$$

iniettive, e tutti questi sono iniettivi in

$$S' = S_{x_0 \dots x_r}$$

• Se $f = \sum f_i \in \check{\mathcal{C}}^0$, allora $(df)_{ij} = f_j - f_i$

$\Rightarrow \sum f_i \in \ker d$ sse $f_i = f_j \quad \forall i, j$, i.e.

$$f \in S' \text{ e } f \in \bigcap_{i=0}^r S_{x_i} = S.$$

$$\Rightarrow \check{H}^0(U, \mathcal{F}) = \ker d \cong S.$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \mathcal{F}(X)$$

Condensiamo in $\tilde{H}^r$:

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} (U, Y)$$

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} S_{x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_r}$$

$$\xrightarrow{d}$$

$$S_{x_0 \dots x_r}$$

A -modulo
libero con
base

$$x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}, l_i \in \mathbb{Z}$$

Se $f = (f_i)$, allora

$$df = \sum_{i=0}^r (-1)^i f_i$$

Oss. che se $x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$ ha almeno un
esponente $l_i \geq 0$, allora è in $\text{Im } d$

tramite $(0, \dots, 0, x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}, 0, \dots, 0) \in \bigoplus_{i=0}^{r-1} S_{x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_r}$

Verifichiamo: ogni $f_i \in S_{x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_r}$ è somma
di monomi con $l_i \geq 0 \Rightarrow$ ogni elemento
in $\text{Im } d$ è somma di monomi con
almeno un $l_i \geq 0$

$$\Rightarrow \tilde{H}^r(U, Y) \cong \frac{S_{x_0 \dots x_r}}{\text{Im } d} \text{ è un } A\text{-modulo}$$

libero con base i monomi

$$x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r} \mid l_i < 0 \quad \forall i = 0, \dots, r$$

Inoltre il grado del monomio è

$$\sum l_i \leq -r-1$$

Il grado $-r-1$ abbiamo un unico

monomi $x_0^{-1} \dots x_r^{-1}$

$\Rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ è un A -modulo libero di rank 1.

e: $H^r(X, \mathcal{O}_X(u)) = 0 \quad \forall u > -r-1.$

Oss. in particolare che il pto (d) nel perfect pairing è banale per $n < 0$.

Per $n \geq 0$:

$H^0(X, \mathcal{O}_X(u)) \cong S_n$ ha la base dei monomi di grado n

e abbiamo quindi un pairing:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(u)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-u-r-1))$$

$$\left(\begin{array}{c} x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r} \\ \sum i_j = u \\ i_j \geq 0 \end{array} , \begin{array}{c} x_0^{a_0} \dots x_r^{a_r} \\ \sum a_j = -u-r-1 \\ a_j < 0 \end{array} \right) \mapsto H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } a_j + i_j \neq -1 \\ x_0^{-1} \dots x_r^{-1} & \text{se } a_j + i_j = -1 \end{cases}$$

$\forall j$

Questo è un perfect pairing: anzi

$$x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r}$$

determina un elemento

$$x_0^{-1-i_0} \dots x_r^{-1-i_r}$$

nella base di H^r .

Resta da provare che:

$$H^i(X, \mathcal{O}(n)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Procediamo per induzione su $i = 1, \dots, r-1$.

Se $r=1$ non c'è niente da dire.

Se $r \geq 1$.

Consideriamo il complesso di Serre, e localizziamo tutto rispetto a K_r .

OSS Consideriamo ora

$$X = \mathbb{P}_K^n$$

Teorema Sia X uno
schema proiettivo su
un anello noether. A .

K campo

$\forall Y$

coerente

su X ,

non ha:

$$H^i(X, Y)$$

è un A -modulo
f.g.

$\forall i$.

In particolare, se $A=K$
 $H^i(X, Y)$ sono
 K -spazi vet. di
dim. finita
non si può considerare
 $X(Y)$

Si può definire

$$\omega_X = \bigwedge^n \underbrace{\Omega_{X,K}}_{\text{cotang.}}$$

"fascio canonico"

e non ha: 1) $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$

2) $\forall Y$ fascio coerente su X ,
c'è un pairing naturale

$$H^0(Y, \omega) \times H^n(X, Y)$$

$$\rightarrow H^n(X, \omega) \otimes_K$$

duale di K -spazio vet. di dim. finita

(duale di serie per $\mathbb{P}_K^n$)

Se $Y \in \text{p.e.}$ $H^0(Y, \omega) = H^0(H^0(Y, \omega))$
 $= H^0(X,$

3 (dualità di Serre per $\mathbb{P}_k^n$)

Per ogni fascio $\mathcal{F}$ l.c. su X , c'è
un isom. naturale

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)^\vee$$

$\forall i.$

→ Questo enunciato si generalizza:
ogni X schema proiettivo su k ,
spazio dimensionale di dim. n ,
non + condizioni su singolarità
(per esempio: liscio).

Definizione

Esercizi:

1) Sia $X = \mathbb{A}_k^2$

$$U = X \setminus \{0,0\}$$

Mostrare che $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ è isomorfo al
 k -spazio vet. generato dai monomi

$$x^i y^j \quad i, j < \infty$$

usando un ricoprimento affine.

2) Sia $X \subset \mathbb{P}_k^2$ una curva definita da
un polinomio omogeneo di grado d .

$$\text{Supp. } (1:0:0) \notin X.$$

Calcolare allora $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ usando il
ricoprimento affine $X = X_1 \cup X_2$

$$\text{con } X_i = \{X \cap \{x_i \neq 0\}\}, \quad i=1,2.$$

3) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio annullato
e $\text{Pic}(X)$ il gruppo delle classi d'isom.
di fasci invertibili su X .

$$\text{Mostrare che } \text{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

usando l'isomorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

fascio degli om.
invertibili, gruppo
ab. rispetto al
moltiplicazione