5 Operatori di Toeplitz

Di cosa si tratta? Studiamo i cosidetti operatori di Toeplitz nello spazio di Hardy delle funzioni 2π-periodiche. Caraterizziamo gli operatori Fredholm e troviamo una “formula topologica” che esprime l’indice in forma di un indice di avvolgimento.

Lo spazio $L^2(\mathbb{S}^1) = L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R})$ degli funzioni 2π-periodiche e integrabili al quadrato su $[0, 2\pi]$ con prodotto interno

$$(f, g)_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

ha la base ortonormale $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, dove

$$\boxed{e_n(x) = e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z}.}$$

Ogni $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ ha la rappresentazione (serie di Fourier, convergenza in $L^2(\mathbb{S}^1)$)

$$\boxed{f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n, \qquad \widehat{f}(n) = (f, e_n)_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx.}$$

Se $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) = \mathscr{C}_{2\pi-per}(\mathbb{R})$, cioè una funzione continua e 2π-periodica, allora

$$M_\varphi f := \varphi \cdot f, \qquad f \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

definisce l’operatore $M_\varphi \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ con $\|M_\varphi\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))} \leqslant \|\varphi\|_\infty$:

$$\|M_\varphi f\|^2_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x) f(x)|^2\,dx \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |\varphi(x)|^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \|\varphi\|^2_\infty \|f\|^2_{L^2}.$$

Inoltre è facile da vedere che $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$.

Nota: Vale perfino $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Infatti, sia $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$ (Weierstrass!). Sia χ_h l’estensione 2π-periodica della funzione caratteristica dell’intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$ moltiplicato per $1/\sqrt{2h}$. Allora $\|\chi_h\|_{L^2} = 1/\sqrt{2\pi}$ e, vista la continuità di φ,

$$\frac{\|M_\varphi \chi_h\|^2_{L^2}}{\|\chi_h\|^2_{L^2}} = \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} |\varphi(x)|^2\,dx \xrightarrow{h\to 0+} |\varphi(x_0)|^2 = \|\varphi\|^2_\infty.$$

5.1 Definizione (Hardy space)**.** *Si definisce*

$$H^2(\mathbb{S}^1) = \big\{f \in L^2(\mathbb{S}^1) \mid \widehat{f}(n) = 0 \textit{ per ogni } n < 0\big\} = \overline{\mathrm{span}\{e_0, e_1, e_2, e_3, \ldots\}}.$$

Denotiamo con $P = P_{H^2(\mathbb{S}^1)}$ la proiezione ortogonale con $\operatorname{im} P = H^2(\mathbb{S}^1)$, cioè

$$\boxed{P\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e_n.}$$

Ovviamente

$$(I-P)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e_n\Big) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n)e_n.$$

5.2 Definizione. *Sia* $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. *Allora*

$$T_\varphi f = PM_\varphi f = P(\varphi f), \qquad f \in H^2(\mathbb{S}^1),$$

definisce $T_\varphi \in \mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1))$, *il cosidetto operatore di Toeplitz associato a* φ.

Valgono $\|T_\varphi\| \leqslant \|P\|\|M_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ e $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$, dato che

$$(T_\varphi f, g) = (PM_\varphi, g) = (f, M_{\overline{\varphi}} Pg) = (Pf, M_{\overline{\varphi}} g) = (f, PM_{\overline{\varphi}} g) = (f, T_{\overline{\varphi}} g),$$

per ogni $f = Pf, g = Pg \in H^2(\mathbb{S}^1)$.

5.1 Proprietà di Fredholm

5.3 Teorema. $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \Rightarrow (I-P)M_\varphi P,\ PM_\varphi(I-P) \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1))$.

Dimostrazione. **1. passo:** Sia $\varphi = e_L$ con $L \in \mathbb{Z}$. Allora

$$M_\varphi Pf = e_L \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e_{n+L} = \sum_{n=L}^{+\infty} \widehat{f}(n-L)e_n.$$

$L \geqslant 0 \Rightarrow (I-P)M_\varphi P = 0$.

$L < 0 \Rightarrow (I-P)M_\varphi Pf = \sum_{n=L}^{-1} \widehat{f}(n-L)e_n \in \langle e_L, e_{L+1}, \dots, e_{-1}\rangle$.

$\Rightarrow (I-P)M_\varphi P \in \mathscr{F}(L^2(\mathbb{S}^1)) \subseteq \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1))$.

2. passo: Sia $\varphi = p = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$ un polinomio trigonometrico.

1. passo $\Rightarrow (I-P)M_p P = \sum_{n=-N}^{N} a_n (I-P)M_{e_n} P \in \mathscr{F}(L^2(\mathbb{S}^1))$.

3. passo: Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Teorema di Stone-Weierstrass $\Rightarrow$

Esiste successione (p_k) di polinomi trigonometrici con $\|p_k - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

$\Rightarrow \|(I-P)M_{p_k}P - (I-P)M_\varphi P\| = \|(I-P)M_{p_k-\varphi}P\| \leqslant \|p_k - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$
$\Rightarrow (I-P)M_\varphi P$ è limite di operatori di rango finito, quindi è compatto.
Teoremi 1.5 e 2.6 $\Rightarrow PM_\varphi(I-P) = \big((I-P)M_\varphi^* P\big)^* = \big((I-P)M_{\overline{\varphi}}P\big)^*$ compatto. ■

5.4 Corollario. *$\varphi, \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \Rightarrow T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ modulo $\mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1))$.*

Dimostrazione. $M_{\varphi\psi} = M_\varphi M_\psi$ e Teorema 5.3 $\Rightarrow$

$$S := PM_{\varphi\psi} - PM_\varphi PM_\psi = PM_\varphi(I-P)M_\psi \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{S}^1)).$$

$S(H^2(\mathbb{S}^1)) \subseteq H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} = S|_{H^2(\mathbb{S}^1)} \in \mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1)).$ ■

5.5 Lemma. *Per $h \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ definiamo $(S_h f)(x) := f(x+h)$. Allora:*

i) $S_h \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ e $S_h \in \mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1))$ sono invertibili con $(S_h)^{-1} = S_{-h}$.

ii) $S_h P = PS_h$ e $T_{S_h\varphi} = S_h T_\varphi S_{-h}$.

Dimostrazione. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $S_h f$:

$$\widehat{S_h f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x+h)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(y-h)} f(y)\,dy = e^{inh}\hat{f}(n).$$

Seguono i) e $S_h P = PS_h$. Inoltre, $S_h(f\cdot g) = (S_h f)\cdot(S_h g)$ e $S_h S_{-h} = I$ implicano

$$M_{S_h\varphi} f = S_h\varphi \cdot f = S_h(\varphi \cdot S_{-h} f) = (S_h M_\varphi S_{-h})f.$$

$\Rightarrow M_{S_h\varphi} = S_h M_\varphi S_{-h} \Rightarrow T_{S_h\varphi} = PM_{S_h\varphi} = PS_h M_\varphi S_{-h} = S_h PM_\varphi S_{-h} = S_h T_\varphi S_{-h}$ ■

5.6 Teorema. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$. Allora:*

$$T_\varphi \in \mathrm{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1)) \iff \varphi \text{ non ha degli zeri.}$$

Dimostrazione. "$\Leftarrow$": $\psi := 1/\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$.
Corollario 5.4 $\Rightarrow T_\varphi T_\psi \equiv T_{\varphi\psi} = T_1 = I$ modulo operatori compatti.
Analogamente: $T_\psi T_\varphi = I$ modulo operatori compatti.
$\Rightarrow T_\varphi$ invertibile modulo operatori compatti.
Teorema 3.9 $\Rightarrow T_\varphi$ Fredholm.
"$\Rightarrow$": **1. passo:** Supponiamo che $\varphi \equiv 0$ in $[x_0 - \pi/N, x_0 + \pi/N]$ per un $N \in \mathbb{N}$.
Definiamo

$$\varphi_n = S_{-2\pi n/N}\varphi, \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

$\varphi_n \equiv 0$ in $[(x_0 + 2\pi n/N) - \pi/N, (x_0 + 2\pi n/N) + \pi/N] \Rightarrow \varphi_0 \cdot \ldots \cdot \varphi_{N-1} \equiv 0$ in $\mathbb{R}$.

Corollario 5.4 $\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}} = T_{\varphi_0 \cdot \ldots \cdot \varphi_{N-1}} = 0$ modulo operatori compatti.

Lemma 5.5 $\Rightarrow T_{\varphi_k} = S_{-2\pi k/N} T_\varphi S_{2\pi k/N}$ Fredholm.

Teorema 3.15 $\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}}$ Fredholm.

$\Rightarrow T_{\varphi_0} \cdots T_{\varphi_{N-1}} \in \mathscr{K}(H^2(\mathbb{S}^1)) \cap \operatorname{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ ↯

(dato che $\mathscr{K}(H) \cap \operatorname{Fred}(H) = \varnothing$ per ogni H con $\dim H = +\infty$).

2. passo: Supponiamo che esista un x_0 tale che $\varphi(x_0) = 0$.

Possiamo supporre che $x_0 = 0$ (altrimenti consideriamo $S_{-x_0}\varphi$).

Sia χ_k 2π-periodica con $\chi_k(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \leqslant x \leqslant 1/2k \\ 2kx - 1 & : 1/2k \leqslant x \leqslant 1/k \\ 1 & : 1/k \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$.

$\chi_k \varphi \xrightarrow{k\to+\infty} \varphi$ uniformemente:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |(\varphi - \chi_k\varphi)(x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |(1-\chi_k)(x)||\varphi)(x)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1/k} |\varphi(x)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

$$\varphi(x) - \chi_k(x)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & : 0 \leqslant x \leqslant 1/2k \\ 2(1-kx)\varphi(x) & : 1/2k \leqslant x \leqslant 1/k \\ 0 & : 1/k \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |(\varphi - \chi_k\varphi)(x)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1/k} |\varphi(x)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

$\Rightarrow \|T_{\chi_k\varphi} - T_\varphi\| \leqslant \|\chi_k\varphi - \varphi\|_\infty \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

$\operatorname{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ aperto in $\mathscr{L}(H^2(\mathbb{S}^1)) \Rightarrow \exists\, K \quad \forall\, k \geqslant K: \quad T_{\chi_k\varphi} \in \operatorname{Fred}(H^2(\mathbb{S}^1))$ ↯

(è in contraddizione con l'affermazione del primo passo) ■

Usermo il seguente risultato senza dimostrazione:

Indice di avvolgimento: Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ senza zeri. Allora esistono un unico numero $L \in \mathbb{Z}$ e una $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ tale che

$$\boxed{\varphi(x) = e^{iLx}e^{\psi(x)} \qquad \forall\, x.}$$

$\tau(\varphi) := L$ è detto indice di avvolgimento di φ. Se $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{S}^1)$ vale

$$\boxed{\tau(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx.}$$

5.7 Teorema (Gohberg-Krein)**.** *Sia $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ senza zeri. Allora* $\operatorname{ind} T_\varphi = -\tau(\varphi)$*.*

Dimostrazione. Definiamo $\varphi_t(x) := e^{iLx}e^{t\psi(x)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

φ_t non ha zeri $\overset{5.6}{\Rightarrow}$ T_{φ_t} Fredholm.

$t \mapsto \varphi_t : [0,1] \to \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ continuo.

$\Rightarrow t \mapsto T_{\varphi_t} : [0,1] \to \mathscr{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ continuo.

Teorema 5.6, Teorema 3.13, a) $\Rightarrow \operatorname{ind} T_\varphi = \operatorname{ind} T_{\varphi_1} = \operatorname{ind} T_{\varphi_0} = \operatorname{ind} T_{e_L}$.

$L \geqslant 0$: Sia $f \in H^2(\mathbb{S}^1)$.

$$T_{e_L} f = P\Big(e_L \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n\Big) = \sum_{n=L}^{+\infty} \widehat{f}(n-L) e_n.$$

$$\Rightarrow T_{e_L} \text{ iniettivo e } \operatorname{im} T_{e_L} = \Big\{ f \in H^2(\mathbb{S}^1) \mid \widehat{f}(0) = \ldots = \widehat{f}(L-1) = 0 \Big\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{codim} \operatorname{im} T_{e_L} = L \text{ e } \operatorname{ind} T_{e_L} = -L = -\tau(\varphi).$$

$L < 0$: $(T_{e_L})^* = T_{\overline{e_L}} = T_{e_{-L}}$

$$\Rightarrow \operatorname{ind} T_{e_L} \overset{3.10}{=} -\operatorname{ind}(T_{e_L})^* = -\operatorname{ind} T_{e_{-L}} \overset{-L>0}{=} -(-(-L)) = -L = -\tau(\varphi).$$

■

5.2 Lo spettro degli operatori di Toeplitz (complemento)

Nel seguito scriviamo $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$, $n \in \mathbb{Z}$, per $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ (si noti che $L^q(\mathbb{S}) \subseteq L^p(\mathbb{S})$ se $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$).

5.8 Lemma. *Sia $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$. Allora valgono:*

a) $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$ *quasi ovunque.*

b) f *a valori reali e* $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \Rightarrow f \equiv \widehat{f}(0)$ *quasi ovunque.*

Dimostrazione. a) Ipotesi $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} p(x) f(x)\, dx = 0$ per tutti i polinomi trigonometrici.

$$\text{Stone-Weierstrass Theorem} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \varphi(x) f(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$$

$\Rightarrow f = 0$ quasi ovunque (veda Teorema 6.12).

b) Sia $c = \widehat{f}(0)$ e $g := f - c$.

$\Rightarrow \widehat{g}(n) = \widehat{f}(n) - (c, e_n)_{L^2} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0$.

g a valori reali $\Rightarrow \widehat{g}(-n) = \overline{\widehat{g}(n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0$.

a) $\Rightarrow g = 0$ quasi ovunque.

■

5.9 Lemma. *Siano $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Allora $fg \in L^1(\mathbb{S}^1)$ e $\widehat{fg}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n-k)\hat{g}(k)$.*

Dimostrazione. Disuguaglianza di Hölder $\Rightarrow fg \in L^1(\mathbb{S}^1)$ con $\|fg\|_{L^1(\mathbb{S}^1)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}$

$$|\widehat{fg}(n)| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)||g(x)|\,dx \leqslant 2\pi\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Se $s_n(f,g)$ denota la serie, allora

$$|s_n(f,g)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n-k)||\hat{g}(k)| \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n-k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Quindi

$$(f,g) \mapsto T(f,g) := \widehat{fg}(n) - s_n(f,g) : L^2(\mathbb{S}^1) \oplus L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è bilineare e continua, cioè esiste $C \geqslant 0$ con

$$|T(f,g)| \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \qquad \forall\, f,g \in L^2(\mathbb{S}^1).$$

Per $p = e_r$ e $q = e_s$ con $r,s \in \mathbb{Z}$ vale

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{pq}(n) = (e_{r+s}, e_n)_{L^2} = \delta_{r+s,n} \qquad \text{(simbolo di Kronecker)}, \\ s_n(p,q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{p}(n-k)\hat{q}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{n-k,r}\delta_{k,s} = \delta_{n-s,r} = \delta_{r+s,n} \end{array}\right\} \Rightarrow T(p,q) = 0.$$

T bilineare $\Rightarrow T(p,q) = 0$ se p,q polinomi trigonometrici.

Siano $f,g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ arbitrari e $p_N := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e_k$, $q_N := \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k)e_k$.

$\Rightarrow p_N \xrightarrow{N\to+\infty} f$ e $q_N \xrightarrow{N\to+\infty} g$ in $L^2(\mathbb{S}^1)$

T continuo $\Rightarrow 0 = T(p_N, q_N) \xrightarrow{N\to+\infty} T(f,g)$

$\Rightarrow T(f,g) = 0 \Rightarrow \widehat{fg}(n) = s_n(f,g)$ per ogni $f,g \in L^2(\mathbb{S}^1)$. ∎

5.10 Lemma. *Sia $\{0\} \neq V \subseteq L^2(\mathbb{S}^1)$ sottospazio chiuso con $M_{e_1}(V) \subseteq V$ e $\bigcap_{n\geqslant 0} M_{e_n}(V) = \{0\}$. Allora esiste $u \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tale che*

$$V = M_u(H^2(\mathbb{S}^1)) = \{uf \mid f \in H^2(\mathbb{S}^1)\}, \qquad |u| = 1 \textit{ quasi ovunque.}$$

Dimostrazione. Scriviamo $M_n := M_{e_n}$ per l'operatore di moltiplicazione per e_n. Si noti che tutti M_n sono operatori unitari in $L^2(\mathbb{S}^1)$ con $M_n^* = M_{-n}$ e $M_mM_n = M_{m+n}$.

$\Rightarrow V_n := M_n(V)$ sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Vale $V_{n+1} = M_1(V_n) \quad \forall\, n,\ V \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ e $\bigcap_{n\geqslant 1} V_n = \{0\}$.

Sia $V = V_1 \oplus U_1$ con $U_1 := V_1^\perp$ (complementare in V).

$U_1 \neq \{0\}$ perché altrimenti $V = V_1$ e quindi $V_n = V \quad \forall\, n$ $\lightning$

Step 1: Sia $u \in U_1$ con $\|u\|_{L^2} = 1$.

$\Rightarrow u \in V$ e $u \in V_n^\perp \quad \forall\, n \geqslant 1$.

$\Rightarrow u \perp M_n u = e_n u \quad \forall\, n \geqslant 1$.

$\Rightarrow 0 = (u, e_n u)_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e_{-n} u \overline{u}\, dx = \widehat{|u|^2}(n) \quad \forall\, n \geqslant 1$.

Lemma 5.8.b) $\Rightarrow |u|^2 = \text{cost}$ q.o.

$\|u\|_{L^2} = 1 \Rightarrow |u| = 1$ q.o.

Step 2: Mostriamo che $U_1 = \operatorname{span}\{u\}$. Sia $w \in U_1$ con $u \perp w$.

$$\left.\begin{array}{c} V = V_1 \oplus U_1 \\ M_n \text{ unitario} \end{array}\right\} \Rightarrow V_n = V_{n+1} \oplus U_{n+1} \text{ con } U_{n+1} := M_n(U_1) = V_{n+1}^\perp \quad \forall\, n \text{ (complementare in } V_n).$$

$n \geqslant 0 \Rightarrow M_n u \perp M_n w$ e $M_n u \in V_{n+1}^\perp \subset V_m^\perp \quad \forall\, m \geqslant n+1 \Rightarrow M_n u \perp M_m w \quad \forall\, m \geqslant n \geqslant 0$

Scambiare ruoli di u e $w \Rightarrow M_n u \perp M_m w \quad \forall\, n \geqslant m \geqslant 0$.

$\Rightarrow 0 = (M_n u, M_m w)_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e_{n-m} u \overline{w}\, dx = \widehat{u\overline{w}}(m-n) \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$

Lemma 5.8.a) $\Rightarrow u\overline{w} = 0$ q.o.

$|u| = 1$ q.o. $\Rightarrow w = 0$ q.o.

Step 3: $U := \bigcup_{n\geqslant 1} U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ è uno sottospazio di V.

Sia $x \in V$ e $x \in U^\perp$.

$\Rightarrow x \in V \cap U_1^\perp \Rightarrow x \in V_1^{\perp\perp} = V_1$.

$\Rightarrow x \in V_1 \cap U_2^\perp \Rightarrow x \in V_2^{\perp\perp} = V_2$.

Iterazione $\Rightarrow x \in \bigcap_{n\geqslant 1} V_n = \{0\}$

$\Rightarrow U^\perp = \{0\}$ (complementare in V) $\Rightarrow V = \overline{U}$.

Step 4: $V = \overline{U} = \overline{\operatorname{span}\{u, ue_1, ue_2, \ldots\}} = M_u(\overline{\operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}}) = M_u(H^2(\mathbb{S}^1))$. ∎

5.11 Teorema (F. e M. Riesz). $0 \neq f \in H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow N_f := \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = 0\}$ *ha misura zero.*

Dimostrazione. $V := \{g \in H^2(\mathbb{S}^1) \mid g|_{N_f} \equiv 0\}$ è sottospazio di $L^2(\mathbb{S}^1)$ con $M_{e_1}(V) \subset V$ e

$$M_{e_n}(V) \subset M_{e_n}(H^2(\mathbb{S}^1)) = \overline{\operatorname{span}\{e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots\}}.$$

Lemma 5.10 $\Rightarrow V = M_u(H^2(\mathbb{S}^1))$ con $|u| = 1$ q.o.

$1 = e_0 \in H^2(\mathbb{S}^1) \Rightarrow u = M_u(e_0) \in V \Rightarrow u = 0$ su N_f.

$\Rightarrow N_f$ ha misura zero. ■

5.12 Teorema (Coburn's Lemma)**.** *Sia* $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$ *senza zeri. Allora* $\ker T_\varphi = \{0\}$ *oppure* $\ker T_\varphi^* = \{0\}$.

Dimostrazione. Supponiamo il contrario.

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq f, g \in H^2(\mathbb{S}^1): \quad T_\varphi f = T_{\overline{\varphi}} g = 0.$

$\Rightarrow P(\varphi f) = P(\overline{\varphi} g) = 0$

$\Rightarrow \widehat{\varphi f}(n) = 0$ e $\widehat{\varphi \overline{g}}(-n) = \overline{\widehat{\overline{\varphi} g}(n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0.$

$\widehat{\overline{g}}(n) = \overline{\widehat{g}(-n)} = 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow} \widehat{(\varphi f)\overline{g}}(n) = 0 \quad \forall\, n \geqslant 0.$

$\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n \leqslant -1 \overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow} \widehat{(\varphi \overline{g}) f}(n) = 0 \quad \forall\, n \leqslant 0.$

$(\varphi \overline{g}) f = (\varphi f)\overline{g} \Rightarrow \widehat{\varphi f \overline{g}}(n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$

Lemma 2 $\Rightarrow \varphi \overline{g} f = 0$.

Teorema $\Rightarrow \varphi = 0$ quasi ovunque $\lightning$ (infatti, $f, g \neq 0$ q.o.). ■

5.13 Teorema. *Sia* $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$*. Allora:*

$$T_\varphi \textit{ invertibile} \iff T_\varphi \textit{ Fredholm e } \operatorname{ind} T_\varphi = 0.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Ovvio.

"$\Leftarrow$": Teorema 5.6 $\Rightarrow \varphi$ non ha zeri.

$0 = \operatorname{ind} T_\varphi = \dim\ker T_\varphi - \dim\ker T_\varphi^*$.

Teorema 5.12 $\Rightarrow \dim\ker T_\varphi = 0$

Alternativa di Fredholm $\Rightarrow T_\varphi$ biiettivo, cioè invertibile. ■

5.14 Corollario. *Sia* $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$*. Allora:*

$$\sigma(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{S}^1) \cup \{\lambda \mid \tau(\lambda - \varphi) \neq 0\}.$$

Dimostrazione. Teoremi 5.6, 5.7, 5.13 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda I - T_\varphi = T_{(\lambda-\varphi)} \text{ invertibile} &\iff \lambda - \varphi(x) \neq 0 \quad \forall\, x \text{ e } \tau(\varphi - \lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \notin \varphi(\mathbb{S}^1) \text{ e } \tau(\varphi - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Quindi: $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \varphi(\mathbb{S}^1)$ oppure $\tau(\varphi - \lambda) \neq 0$. ■