FOGLIO DI ESERCIZI VI, PER IL 11.12.25

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Esercizio 6.1. Calcolare il gruppo di automorfismi di $\mathbb{P}^n_k$.

Esercizio 6.2. Sia $\phi : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^m_k$ un morfismo. Allora o $\phi(\mathbb{P}^n_k)$ è un punto oppure $m \geq n$ e $\dim \phi(\mathbb{P}^n_k) = n$.

Esercizio 6.3. Sia Y uno schema.

(1) Dimostrare che $\mathbb{P}^n_Y \times \mathbb{P}^m_Y$ è proiettivo su Y.
(2) Dimostrare che la composizione di due morfismi proiettivi su Y è un morfismo proiettivo.

Esercizio 6.4. Sia X una varietà non-singolare proiettiva di dimensione 1 (una curva liscia). Dimostrare che $X \simeq \mathbb{P}^1$ se e solo se esistono punti $p, q \in X$ con $\mathcal{O}_X(p) \simeq \mathcal{O}_X(q)$. Concludere che se $X \not\simeq \mathbb{P}^1$, allora esiste una mappa iniettiva $X \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ (in particolare, $\mathrm{Pic}(X)$ non è discreto in questo caso).

Esercizio 6.5. Sia $X = \mathbb{A}^2_k$ e sia $U = X \smallsetminus \{(0,0)\}$. Usando un ricoprimento affine, mostrare che $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ è isomorfo al k-spazio vettoriale generato dai monomi $x^i y^j$ con $i, j < 0$.

Esercizio 6.6. Sia $X \subset \mathbb{P}^2_k$ una curva definita da un polinomio omogeneo di grado d. Supponiamo che $(1:0:0) \notin X$. Calcolare $\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ usando il ricoprimento affine $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_i = X \cap \{x_i \neq 0\}$.

Esercizio 6.7. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato, $\mathrm{Pic}(X)$ il gruppo delle classi di isomorfismo di fasci invertibili, e $\mathcal{O}_X^*$ il fascio degli elementi invertibili in $\mathcal{O}_X$ (gruppo abeliano rispetto al prodotto). Mostrare che $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, usando l'isomorfismo di $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ con il primo gruppo di coomologia di Cech.