GEOMETRIA 5 - TEORIA DEI SCHEMI

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Contents

1. Schemi

1.1. **Introduzione.** Una varietà algebraica $X \subset k^m$ tradizionalmente è definito come il luogo di zeri di un insieme di polinomi $f_1, \dots, f_n$ con m variabili e con coefficienti in un campo k (algebraicamente chiuso, di caratteristica 0).

Si vede subito, che X infatti non dipende dalla scelta di $f_1, \dots, f_n$ ma invece dall ideale I generato dai f_i. Poi l'anello di funzioni regolari su X è, per definizione,

$$k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I$$

, che sono 'polinomi' o funzioni regolari definito su X. Per avere una correspondenza biiettiva tra ideali e varieta algebriche, si deve imporre che $k[X]$ *è un dominio*: per esempio, il luogo di zeri di (y) e (y^2) è identico, anche se gli ideali non lo sono. Nella perspettiva classica, si risolve questa ambivalenza ristringendo l'insieme di ideali che sono ammessi. Nella perspettiva moderna degli schemi, si aumenta invece l'insiemme di oggetti geometrici – c'è si introduce un oggetto geometrico che corrisponde a (y^2) ed è diverso da (y).

Perché questo è utile anche se magari si è interessato sopratutto nelle varietà algebriche? Si consideri per esempio una degenerazione nel parametro t di una parabola, $xt - y^2 = 0$. Per $t \neq 0$, questo definisce una varietà algebrica. Per $t = 0$ invece otteniamo l'ideale (y^2) e quindi la teoria delle varietà algebriche ci dice di prendere il radicale e vederlo come la retta data da (y). Ma questo non dà una teoria soddisfacente; per esempio, il grado per $t \neq 0$ sarebbe uguale a 2, metre per $t = 0$ uguale a 1. La teoria dei schemi dà la possibilità di parlare in un senso formale anche dal oggetto geometrico associato a (y^2) (che dovrebbe essere una 'retta doppia').

Quindi, la teoria dei schemi introduce la possibilità di avere nilpotenti nel anello delle coordinati. Ma non solo, nel mondo dei schemi si puo per esempio anche lavorare su un anello (come $\mathbb{Z}$ con applicazioni alla teoria dei numeri) invece del campo k, o l'anello delle coordinati non è necessariamente finitamente generato come k-algebra.

Un'altro perspettiva che gli schemi offrono, è che permettono di definire 'varietà astratte' – invece delle varietà con un spazio ambientale come $\mathbb{A}^n_k$ o $\mathbb{P}^n_k$. Questo passo è analogo al concetto delle varietà astratte nella geometria differenziale: si ottiene l'oggetto astratto incollando aperti. Nel caso degli schemi, gli ogetti di base sono i schemi affini.

1.2. **Definizione di Schemi.** Uno schema affine è dato da

(1) $\operatorname{Spec}(R)$ con R anello commutativo con la topologia di Zariski e
(2) $\mathcal{O}$ fascio strutturale/fascio delle funzione regolare sullo schema.

Definiamo questo oggetto in tre passi, prima come insieme, poi come spazio topologico e finalmente come 'spazio localmente annellato', quindi lo fascio strutturale $\mathcal{O}$.

1.2.1. *Schemi affini come insieme.* Sia R un anello (assumiamo sempre che gli annelli sono commutativi con 1).

Definizione 1.1. Gli elementi di $\operatorname{Spec}(R)$ come insieme sono i ideali primi $\mathfrak{p}$ di R.

Osservazione 1.2. $R \subseteq R$ *non* è un ideale primo. $\{0\}$ invece lo è se R non ha divisori di zero (R è un dominio). Se R è un campo, l'unico ideale primo è $\{0\}$ perchè ogni elemento $x \neq 0$ è invertibile.

Un ideale primo $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale se $\mathfrak{m}$ è massimale rispetto all'inclusione; c'è se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Ogni ideale diverso da R è contenuto in un ideale massimale.

Osservazione 1.3. Un ideale $\mathfrak{p}$ è primo se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un dominio, e $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un campo.

Esempio 1.4. (1) $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ interi primi }\} \cup \{(0)\}$.
(2) $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ perchè $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo
(3) $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$. In questo caso, $\mathbb{C}[x]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(\alpha)$. Quindi $(x-\alpha)$ è un ideale massimale. Poi tutti ideali primi hanno questa forma: Sia $\mathfrak{p} \neq (0)$ un ideale primo di $\mathbb{C}[x]$ e $f \in \mathfrak{p}$ un elemento di grado minimo. Allora f non è costante perchè altrimenti $\mathfrak{p} = \mathbb{C}[x]$. Se $\deg(f) > 1$, allora $f = c(x-\alpha_1) \cdot \ldots (x-\alpha_n)$ perché $\mathbb{C}$ è algebraicamente chiuso. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e quindi deve contenere anche uno dei $(x-\alpha_i)$. Visto che $\mathbb{C}[x]$ è un dominio ad ideali principali (per esempio dovuto al fatto che esiste un algorithmo di divisione con resto), dobbiamo avere $\mathfrak{p} = (x-\alpha_i)$.

Dato $f \in R$ si può associare a f una 'funzione' $\overline{f}$ con dominio $\operatorname{Spec}(R)$ (vogliamo vedere i elementi in R come polinomi/funzioni regolari su $\operatorname{Spec}(R)$). Dato $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, consideriamo

$$\alpha\colon R \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p}).$$

Allora, l'imagine di $\overline{\mathfrak{p}}$ sotto f è definito come $\alpha(f)$ e scriviamo $\overline{f}(\mathfrak{p})$.

Osservazione 1.5. Questo non definisce una vera funzione, perchè il codominio $\operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p})$ cambia con $\mathfrak{p}$.

Esempio 1.6. $f = 15 \in \mathbb{Z}$. Allora il 'valore' di f a (7) per esempio è $15 \mod 7 = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (11) è $[4] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (0) è $15 \in \mathbb{Q}$.

Esempio 1.7. $R = k[x]/(x^2)$, allora $\operatorname{Spec}(R) = \{(x)\}$. Il 'valore' di $f = x \in R$ sul unico punto (x) è zero. In particolare, dà una 'funzione' non-zero su $\operatorname{Spec}(R)$ che ha 'valore' zero a tutti i punti di $\operatorname{Spec}(R)$.

1.2.2. *Schemi affini come spazi topologici.* La *Topologia di Zariski* ha chiusi dato cosi: per ogni $S \subset R$, abbiamo un chiuso

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}.$$

Osservazione 1.8. Otteniamo la stessa definizione scrivendo $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \overline{f}(\mathfrak{p}) = 0\}$, che collega alla nozione più classico che i chiusi sono luoghi di zero di un insiemme di polinomi. Poi chiaramente $V(S) = V((S))$ dove (S) è l'ideale generato da S.

Proposizione 1.9. *Prendere i $V(I)$ per I ideali di R come chiusi definisce una topologia su $\operatorname{Spec}(R)$ (la topologia di Zariski).*

Proof. Controlliamo i requisiti per una topologia uno per uno:

- Ogni ideale contiene (0), quindi $V(0) = \operatorname{Spec}(R)$.
- Ogni ideale primo è proprio, quindi $V(R) = \emptyset$.
- Per un insieme di ideali $\{I_\alpha\}_\alpha$ abbiamo:
$$\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Leftrightarrow I_\alpha \subseteq \mathfrak{p}, \forall \alpha \Leftrightarrow \bigcup_\alpha I_\alpha \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$$
- Per due ideali I e J abbiamo:
$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \in V(I) \text{ o } \mathfrak{p} \in V(J) \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad I \cap J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I \cap J), \end{aligned}$$
dove $I \cap J \subset \mathfrak{p} \Rightarrow I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$ perchè se non, esistono $i \in I$ e $j \in J$ con $i, j \notin \mathfrak{p}$. Ma in questo caso $ij \in I \cap J \subset \mathfrak{p}$ e quindi $i \in \mathfrak{p}$ o $j \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo, una contradizione.

$\square$

Gli aperti sono i complementi dei chiusi. Se $S = \{f\}, f \in R$, allora

$$\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) = \operatorname{Spec}(R_f) = X_f,$$

dove $R_f = R[f^{-1}]$ è la localizzazione di R rispetto a f (c'è rispetto al insieme moltiplitivamente chiuso $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$):

Proposizione 1.10. *Gli ideali primi di R_f sono in corrispondenza biunico con i primi di R che non contengono f.*

Proof. Per passare da R a R_f si usano due costruzioni:

- $I \subset R$ ideale, allora $I^e = \{\frac{t}{f^n} \text{ per } t \in I\}$ l'ideale di R_f generato dall immagine di I con
$$\phi\colon R \to R_f, t \mapsto \frac{t}{1}.$$
Si chiama la estensione di I (in R_f).
- $J \subset R_f$, $J^c = \phi^{-1}(J)$, la contrazione di J.

Per ogni ideale abbiamo che $I \subsetneq (I^e)^c$ e $J = (J^c)^e$. Poi la contrazione di un ideale primo è sempre primo, perché la preimagine di un ideale primo tramite un morfismo tra anelli è primo.

Vogliamo dimostrare che per $\mathfrak{q} \subset R$ primo con $f \notin q$ abbiamo $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^e)^c$ e che $\mathfrak{q}^e$ è primo (in generale, l'ideale generato dal immagine di un ideale primo non è necesseriamente un ideale primo). Così si vede che la corrispondenza biunica che cerchiamo è dato dalla estensione con inverso la contrazione (si osserva che per $f \in \mathfrak{q}$, la estensione di $\mathfrak{q}$ è R_f perché f diventa invertibile in R_f).

Entrambe le affermazioni sequono se dimostriamo che $\frac{x}{f^n} \in \mathfrak{q}^e$ implica che $x \in \mathfrak{q}$. Lo facciamo adesso: Sappiamo che $\frac{x}{f^n} \sim \frac{x'}{f^{n'}}$ per un $x' \in \mathfrak{q}$. Per definizione esiste un m t.c. $f^m(xf^{n'} - x'f^n) = 0$ e quindi $xf^{m+n'} = x'f^{m+n}$. Visto che $x' \in \mathfrak{q}$, anche $x'f^{m+n} \in \mathfrak{q}$ e quindi $xf^{m+n'} \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{m+n'} \notin \mathfrak{q}$, e quindi $x \in \mathfrak{q}$ come desiderato. $\square$

Lemma 1.11. *Gli X_f formano una base per la topologia di Zariski.*

Proof. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\mathrm{Spec}(R)$ si può scrivere come unione di aperti X_f. Per definizione abbiamao $U = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(S)$, che possiamo rescrivere come

$$U = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(S) = \mathrm{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f \in S} V(f) = \bigcup_{f \in S} (\mathrm{Spec}(R) \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in S} X_f.$$

□

Gli aperti X_f si comportano bene anche per intersezioni finite:

Lemma 1.12. *Abbiamo* $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

Proof. L'aperto X_f è l'insiemme di primi che non contengono f. Quindi $X_f \cap X_g$ è l'insieme di primi che non contengono f e non contengono g. L'insiemme X_{fg} invece sono gli ideali primi che non contengono fg e quindi che contengono né f né g. □

Osservazione 1.13. $\mathrm{Spec}(R)$ non è quasi mai di Hausdorff. Infatti, gli unici punti chiusi sono i ideali massimali perché se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ la chiusura è

$$\overline{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Esempio 1.14. In $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ i $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$ sono punti chiusi. (0) non è chiuso e la sua chiusura è tutto $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, allora $V(f)$ sono tutti i punti $(x - \alpha)$ t.c. $(f) \subset (x - \alpha)$ che significa α tale che $f(\alpha) = 0$.

—

Lezione 22.9. ...

2. Proprietà di morfismi

2.1. **Finitezza.** Ci sono due condizioni di finitezza di morfismi molto importante, una molto più restrittiva rispetto al altro. Iniziammo con quella più generale:

Definizione 2.1. Un morfismo di schemi $\varphi\colon X \to Y$ si chiama di tipo finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $y \in V = \mathrm{Spec} B$ è un ricoprimento finito del suo preimagine

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

tale che $U_i \simeq \mathrm{Spec}(A_i)$ e la mappa

$$\varphi^{\#}_V\colon B = \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) \to \mathcal{O}_X(U_i) = A_i$$

realizza A_i come un'algebra finitamente generato su B per ogni i.

Osservazione 2.2. Esiste anche il concetto di essere *localmente* di tipo finito dove non si richiede che il ricoprimento di $\varphi^{-1}(V)$ sia finito.

Molti schemi naturali soddisfano questa proprietá, per esempio:

Esempio 2.3. Sottoschemi chiusi $\mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$ dello spazio affine $\mathbb{A}^n_k$ sono chiaramente di tipo finito su k.

La intuiziuno è che richiedere di essere di tipo finito esclude fibre di dimensione infinita e certi situazioni 'non-geometrici' come spetri di annelli locale:

Esempio 2.4. Sia $R = k[x]_{(x)}$ lo annello locale di $\mathbb{A}^1_k$ al punto (x). Gli elementi di R sono funzioni razionali $\frac{f(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \notin (x)$. Per generare l'annello come k-algebra servono almeno $1, x, \frac{1}{g(x)}$ con $g(x)$ monico di grado 1 e $g(x) \neq x$, un numero infinito di generatori. Quindi $\mathrm{Spec}(R)$ non è di tipo finito su $\mathrm{Spec}(k)$.

Il concetto seguente di finitezza è molto più restrittivo:

Definizione 2.5. Un morfismo di schemi $\varphi\colon X \to Y$ è finito se per ogni punto $y \in Y$ c'è un aperto affine $y \in V = \mathrm{Spec}B$ tale che anche $\varphi^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(A)$ è affine e

$$\varphi_V^{\#}\colon B = \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}V) = A$$

realizza A come un modulo finitamente generato su B.

Esempio 2.6. Il morfismo $\varphi\colon \mathrm{Spec}(k[x,y]/(x^2-y)) \to \mathrm{Spec}(k[y])$ che corrisponde alla inclusione $k[y] \to k[x,y]/(x^2-y), y \mapsto y$ è finito perchè $k[x,y]/(x^2-y)$ è generato da 1 e x come $k[y]$-modulo.

Lemma 2.7. *Un morfismo finito ha fibre finite.*

Proof. La domanda è locale e quindi possiamo supporre che $Y = \mathrm{Spec}(B)$ e $X = \mathrm{Spec}(A)$ come nella definizione di essere finito. Assumiamo che A è un B-modulo finitamente generato e sia $y \in Y$. Allora la fibra $k(y) \otimes_B A$ di φ è un $k(y)$ modulo finitamente generato tramitte la mappa $B \to k(y)$. Ma ogni $k(y)$-algebra che è finitamente generato come $k(y)$-modulo ha un numero finito di primi (è Artiniano). $\square$

Osservazione 2.8. Avere fibre finite (si dice anche di essere 'quasi-finito') non è sufficiente per essere un morfismo finito. Per esempio, l'inclusione $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^1$ è data dalla mappa di annelli $k[t] \to k[t,t^{-1}]$. Allora φ è iniettivo quindi quasi-finito, ma non finito perchè $k[t,t^{-1}]$ non è finitamente generato come $k[t]$ modulo.

Osservazione 2.9. Si nota che nelle definizioni di (localmente) di tipo finito e finito si richiede l'esistenza di un certo ricoprimento con aperti affini di Y. Si può dimostrare che questo implica le condizioni per *ogni* ricoprimento affine di Y.

2.2. **Morfismi separati.**

Abbiamo visto che ogni schema affine noetheriano è quasicompatto. Ma questo proprietà non porta gli vantagi che ha in altre teorie. Per esempio che l'immagine di un morfismo definito sullo spazio è chiuso. Questo perchè uno schema affine è quasi mai Hausdorff e quindi quasi mai compatto: già per esempio $\mathbb{A}^1_k$ non lo è. I concetti di morfismi separati e propri danno un analogo di essere Hausdorff e compatto nella categoria degli schemi.

Si riccorda, che un spazio topologico X è Hausdorff se e solo se la diagonale Δ in $X \times X$ è chiuso nella topologia prodotto. Questo generalizza per gli schemi sustituendo la topologia prodotto con il prodotto fibrato.

Sia $\varphi\colon X \to S$ un morfismo tra schemi. La diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è il sottoschema definito su affini $\mathrm{Spec}(A) \subset X$ e $\mathrm{Spec}(B) \subset S$ con $\varphi|_{\mathrm{Spec}(A)}\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ dal ideale generato da elementi

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_B A.$$

Osservazione 2.10. Una definizione alternativa è: La diagonale è l'immagine del unico morfismo $X \to X \times_S X$ che composto con ognuno dei due proiezioni dà l'identitá su X (usando la proprietá universale del prodotto fibrato): l'identità al livello di schemi corrisponde al identità al livello di anelli. Quindi cerchiamo una mappa $\mu\colon A \otimes_B A \to A$ tale che le composizioni con $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ e $A \to A \otimes_B A, a \mapsto 1 \otimes a$ danno l'identità. Dobbiamo avere $\mu(a \otimes b) = ab$ e si verifica che il nucleo di questa mappa è generato da elementi $a \otimes 1 - 1 \otimes a$

Definizione 2.11. Un morfismo $\alpha\colon X \to S$ si chiama separato se la diagonale $\Delta \subset X \times_S X$ è chiusa. Un S-schema X si chiama separato se lo morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.12. Se X e S sono affini, allora la diagonale è un sottoschema chiuso per definizione e quindi φ è separato.

Esempio 2.13. Sia X la 'rette affine con l'origine sdoppiata', c'è lo schema ottenuto incollando $X_1 = \mathrm{Spec}(k[t])$ e $X_2 = \mathrm{Spec}(k[s])$ tramitte il morfismo $k[t,t^{-1}] \to k[s,s^{-1}], t \mapsto s$ che identifica $X_1 \setminus \{0\}$ con $X_2 \setminus \{0\}$. Allora $X \times_k X$ ha un ricoprimento affine dato da $X_1 \times X_1, X_1 \times X_2, X_2 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ (quindi $\mathbb{A}^2$ con 'assi sdopiati' e 'quattro punti di origine'). La diagonale contiene le origini di $X_1 \times X_1$ e $X_2 \times X_2$ ma non quelle di $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$.

Fuori dal origine, gli $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ vanno tutti identificati e la diagonale in ogni $(X_i \setminus \{0\}) \times (X_i \setminus \{0\})$ sono i punti (x, x). Quindi la diagonale in $X_2 \times X_1$ e $X_1 \times X_2$ non è chiusa e il morfismo non separato.

Commento 2.14. Si nota che essere separato è un concetto 'relativo'. La identitá $X \to X$ con X come nel esempio precedente è separato.

Si ricorda che un anello di valutazione è un anello in cui gli ideali sono totalmente ordinati (rispetto al'inclusione). Si dice che un anello locale B domina un altro anello local A se $A \subset B$ e $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$.

Teorema 2.15 (Criterio valutativo di separatezza)**.** *Sia $f\colon X \to S$ un morfismo tra schemi con X noeteriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \operatorname{Spec}(R)$, $U = \operatorname{Spec}(K)$ e $i\colon U \to T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd} \tag{1}$$

esiste al più un morfismo $T \to X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Osservazione 2.16. Se anche S è Noetheriano e f di tipo finito, basta controllare il criterio per ogni anello di valutazione *discreta* R.

Esercizio 2.17. *Sia R un anello di valutazione con campo di frazioni K. Sia $T = \operatorname{Spec}(R)$ e $U = \operatorname{Spec}(K)$. Dare un morfismo da U a uno schema X è la stessa cosa come dare un punto $x \in X$ e un'inclusione di campi $k(x) \hookrightarrow K$. Dare un morfismo da T in X è equivalente a dare due punti x, η in X con $x \in \overline{\eta}$ e un inclusione di campi $k(\eta) \subset K$ tale che R domina l'anello locale di x in $\overline{\eta}$.*

Proof. Supponiamo che f sia separato. Siano $h, h'\colon T \to X$ due morfismi come nel teorema. Allora h e h' definiscono un morfismo $h''\colon T \to X \times_S X$. Visto che $h|_U = h|_{U'}$ h e h' mandano il punto generico η di T nello stesso punto di X e quindi h'' manda il punto generico di T nella diagonale Δ di $X \times_S X$. Visto che Δ è chiusa, h'' manda anche il punto chiuso p nella diagonale. Quindi anche $h(p) = h'(p)$. Visto che h e h' definiscono – per assunzione – anche lo stesso inclusione di $k(h(\eta)) \subset K$, segue dal esercizio che $h = h'$.

Viceversa supponiamo che la condizione del criterio è soddisfatta e vogliamo dimostrare che la diagonale è chiusa. È sufficiente dimostrare: per ogni punto $\eta \in \Delta$ e $x \in \overline{\eta}$ abbiamo anche $x \in \Delta$ (si trova una dimostrazione per esempio in Hartshorne Lemma II.4.5). Sia $K = k(\eta)$ e $\mathcal{O}$ l'anello locale di x nello sottoschema $\overline{\eta}$ (con la struttura di schema ridotto). Allora $\mathcal{O}$ è un sotoanello locale di K e quindi esiste un anello di valutazione R di K che domina $\mathcal{O}$. Se mettiamo $T = \operatorname{Spec}(R)$ otteniamo usando l'esercizio un morfismo $T \to X \times_S X$ che manda il punto generico di T in η e il punto chiuso in x. Composizione con i due proiezioni dà due morfismi $T \to X$ che danno lo stesso morfismo a S e che coincidono su $\operatorname{Spec}(K)$. La condizione quindi da che i due morfismi coincidono. Quindi $T \to X \times_S X$ fatorizza attraverso il morfismo della diagonale $X \to X \times_S X$ e otteniamo che anche $x \in \Delta$. □

Corollario 2.18. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

(1) Inclusioni di sottoschemi sono separate.
(2) La composizione di due morfismi separati è separata.
(3) I morfismi separati sono stabili per cambiamento di base.
(4) Se $f\colon X \to Y$ e $f'\colon X' \to Y'$ sono morfismi separati di schemi su uno stesso schema di base S, allora il prodotto fibrato

$$f \times_S f'\colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$$

è separato.

(5) *Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è separato, allora anche f è separato.*
(6) *Un morfismo $f\colon X \to Y$ è separato se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \to V_i$ siano separati, per ogni i.*

Proof. Per esempio, (2) si può verificare cosi: Sia $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ morfismi di schemi separati. Si considera

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dd, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Una mappa $T \to X$ induce una mappa $T \to Y$ che è unica perchè g è separato. Ma anche una mappa $T \to X$ che commuta con $T \to Y$ è unica perchè f è separato, quindi $T \to X$ è unica e $g \circ f$ è separato. □

2.3. **Morfismi propri.** Uno dei proprietá più importante di spazzi compatti è che una mappa continua $X \to Y$ con X compatto (e Y Hausdroff) manda chiusi in chiusi. Si usa una versione di questo proprietá un po più forte per definire l'analogo nel mondo dei schemi:

Definizione 2.19. Un morfismo tra schemi $\varphi\colon X \to Y$ si chiama
(1) universalmente chiuso se per ogni morfismo $Y' \to Y$ il cambiamento di base $Y' \times_Y X \to Y'$ è chiuso.
(2) proprio se è di tipo finito, separato e universalmente chiuso.

Come prima, un S-schema X si chiama proprio se il morfismo strutturale $X \to S$ lo è.

Esempio 2.20. $\mathbb{A}^1_k$ non è proprio (su k). Il cambiamento di base dato da $\mathbb{A}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ stesso dà la mappa $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ che non è chiuso: l'immagine di $\mathrm{Spec}(k[x,y]/(xy-1))$ è $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ non è chiuso (si deve aggiungere il punto 'a infinito', che faremmo nella sezione successiva).

—

Teorema 2.21 (Criterio valutativo di proprietà)**.** *Sia $f\colon X \to S$ un morfismo di tipo finito tra schemi con X noeteriano. Allora f è separato se e solo se si è verificata la seguente condizione. Per ogni campo K e per ogni anello di valutazione R con campo quoziente K sia $T = \mathrm{Spec}(R)$, $U = \mathrm{Spec}(K)$ e $i\colon U \to T$ il morfismo indotto dall'inclusione $R \subset K$. Dato un morfismo da T a Y e un morfismo da U a X in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo* Lezione 5.11.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S, \end{tikzcd} \tag{2}$$

esiste un unico morfismo $T \to X$ che ritiene commutativo il diagramma.

Proof. Supponiamo che f sia proprio. Siccome f è anche separato, segue dal criterio valutativo di separatezza che se un morfismo $h\colon T \to X$ esiste, allora è unico. Dobbiamo quindi dimostrare l'esistenza.

La proprietà universale del prodotto fibrato dà lo seguente diagramma commutativa:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & X \times_S T \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ & T \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

Sia η l'immagine in $X \times_S T$ del punto unico contenuto in U. Allora f' è chiuso perchè f è universalmente chiuso e quindi anche $f'(\overline{\eta})$ è chiuso e deve essere uguale a T. Quindi abbiamo $p \in \overline{\eta}$ con $f'(p) = x$ dove x è il punto chiuso di T. Quindi otteniamo un morfismo locale di anneli locali $R \to \mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$. Il campo di funzioni di $\overline{\eta}$, $k(\eta)$, è contenuto in K. Visto che R è massimale tra annelli locali in K rispetto a la dominanza, segue che $R \simeq \mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$ e in particolare R domina $\mathcal{O}_{p,\overline{\eta}}$. Quindi Esercizio 2.17 ci dà un morfismo $T \to X \times_S T$ e composizione con $X \times_S T \to X$ dà il morfismo cercato.

Supponiamo adesso che f soddisfa il criterio e vogliamo vedere che f è proprio. Dall criterio valutativo di separatezza segue che f è separato. Visto che supponiamo già che f sia di tipo finito, rimane dimostrare che f è universalmente chiuso. Quindi sia $f' \colon X \times_S S' \to S$ e $Z \subset X \times_S S'$ un chiuso e vogliamo vedere che $f'(Z) \subset S'$ è chiuso. Usiamo come nella dimostrazione del criterio valutativo di separatezza che basta dimostrare il seguente: per ogni $\eta' = f'(\eta) \in f'(Z)$ e $x \in \overline{\eta'}$ anche $x \in f'(Z)$.

Sia $\mathcal{O}$ l'anello locale di x in $\overline{\eta'}$. Allora il campo di frazioni di $\mathcal{O}$ è $k(\eta')$ che è contenuto in $k(\eta)$. Sia R un anello di valutazione in $k(\eta')$ che domina $\mathcal{O}$. In questo modo otteniamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(k(\eta)) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}(R) \arrow[r] & S', \end{tikzcd} \tag{3}$$

Composizione con $Z \to X \times_S S' \to X$ e $S' \to S$ dà morfismi $\operatorname{Spec}(R) \to S'$ e $\operatorname{Spec}(k(\eta)) \to X$. Il criterio ci dice che esiste una mappa $\operatorname{Spec}(R) \to X$ tale che il diagramma diventa commutativo. Visto che $X \times_S S'$ è un prodotto fibrato, otteniamo anche un morfismo $h \colon \operatorname{Spec}(R) \to X \times_S S'$. Visto che $h(\eta_R) \in Z$ e Z è chiuso, anche $h(x_R) \in Z$. Ma allora $x = f'(h(x_R)) \in f'(Z)$. $\square$

Commento 2.22. Come per il criterio valutativo di separatezza si puo dimostrare che se anche S è noeteriano, allora basta controllare il criterio per anelli di valutazione *discreta.*

Commento 2.23. Dal criterio segue, che un esempio di una mappa non-finito ma con fibre finite (quasi finito) come in Osservazione 2.8 non è possibile per morfismi propri. Infatti, si può dimostrare che un morfismo è finito se e solo se è quasi finito e proprio.

Corollario 2.24. *Supponiamo che tutti schemi sono noetheriani:*

(1) Un'immersione chiusa è un morfismo proprio.
(2) La composizione di due morfismi propri è proprio.
(3) I morfismi propri sono stabili per cambiamento di base.
(4) Se $f \colon X \to Y$ e $f' \colon X' \to Y'$ sono morfismi propri di schemi su uno stesso schema di base S, allora il prodotto fibrato

$$f \times_S f' \colon X \times_S X' \to Y \times_S Y'$$

è proprio.
(5) Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ sono due morfismi di schemi e se $g \circ f$ è proprio e g separato, allora f è proprio.
(6) Un morfismo $f \colon X \to Y$ è proprio se e solo se Y può essere ricoperto da sottoinsiemi aperti V_i tali che i morfismi $f^{-1}(V_i) \to V_i$ siano propri, per ogni i.

Proof. Per esempio, per vedere (3), sia $S' \to S$ un morfismo e $f' \colon X' = X \times_S S' \to S'$ il cambiamento di base.

Supponiamo che abbiamo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] & S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Sappiamo già che f' è separato da Corollario 2.18. Essere di tipo finito è stabile per cambiamento di base: si restringe a affini aperti e poi f' è dato da $f'\colon \operatorname{Spec}(A \otimes_B C) \to \operatorname{Spec}(A)$ con C finitamente generato come B-algebra. Si controlla che in questo caso anche $A \otimes_B C$ è finitamente generato come $A \otimes_B B = A$ algebra.

Finalmente, usiamo il criterio valutativo di proprietá per vedere che anche f' è proprio: Perché f è proprio, esiste una mappa $T \to X$ tale che il diagramma rimane commutativo. Ma per la proprietá universale del prodotto fibrato, viene indotto anche una mappa $T \to X'$. □

Definizione 2.25. Una varietá (astratto) è uno schema integrale, separato e di tipo finito su un campo algebraicamente chiuso k. Una varietà completa è una varietá che è anche proprio (su k).

3. Schemi e morfismi proiettivi

3.1. **Proj di un anello graduato.** Analogo a Spec di un anello, che generalizza varietá affini, si può definire Proj di un anello graduato, che generalizza varietá proiettivi.

Si ricorda che un annello graduato S è una A-algebra con

$$S = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_\nu$$

tale che

$$S_\nu S_\mu \subset S_{\nu+\mu} \text{ e } S_0 = A.$$

Qua supponiamo sempre che S sia finitamente generato.

Un elemento f di S si chiama omogeneo di grado ν se $f \in S_\nu$. L'elemento 0 è per definizione omogeneo, ma non ha un grado fissato. Un ideale si chiama omogeneo se è generato da elementi omogenei. Scriviamo

$$S_+ = \bigoplus_{\nu=1}^{\infty} S_\nu,$$

che è un ideale che chiamiamo l'ideale irrelevante.

Dato un annello graduato S, $\operatorname{Proj} S$ è un A-schema. Per adesso supponiamo che S sia generato in grado 1.

Il suo insieme di punti $|\operatorname{Proj} S|$ consiste in ideali primi omogenei $\mathfrak{p}$ tale che $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$.

Esercizio 3.1. $\operatorname{Proj} S = \emptyset$ *se e solo se tutti gli elementi di* S_+ *sono nilpotenti.*

La topologia su $|\operatorname{Proj}(S)|$ ha chiusi della forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in |\operatorname{Proj} S| \text{ e } I \subset \mathfrak{p}\}$$

per un ideale omogeneo I di S.

Finalmente, diamo una struttura di schema su $|\operatorname{Proj} S|$ specificandola su una base di aperti. Sia $f \in S_1$ un elemento di grado 1 e

$$U = |\operatorname{Proj} S| \setminus V(f).$$

Allora U è l'insieme di ideali primi omogenei che non contengono f. Quindi i punti di U possono essere identificato con l'insieme di primi omogenei nella localizaione $S[f^{-1}]$. Il punto chiave per dare una struttura di schema è lo seguente:

Lemma 3.2. *Gli ideali primi omogenei di* $S[f^{-1}]$ *sono in biiezione con (tutti) ideali primi di* $S[f^{-1}]_0$*, il parte di grado* 0 *di* $S[f^{-1}]$.

Proof. Sia $D = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin P\}$ e consideriamo la mappa

$$\varphi\colon D \to \operatorname{Spec}(S[f^{-1}]_0)$$

che manda un ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ in $S[f^{-1}]$ a $\mathfrak{p} \cap S[f^{-1}]_0$. Sia

$$\psi\colon \operatorname{Spec}(S[f^{-1}]_0) \to D$$

la mappa che manda un ideale $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{q}S[f^{-1}]$. C'è, $\psi(\mathfrak{q})$ è generato da elementi s tale che $\frac{s}{f^d} \in \mathfrak{q}$ per $d = \deg(s)$. Allora $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$: l'intersezione degli elementi $s \in \psi(\mathfrak{q})$ come sopra con $S[f^{-1}]_0$ sono, per definizione, gli elementi di $\mathfrak{q}$.

Per vedere che anche $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, sia $s \in \mathfrak{p} \in D$. Allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$ e $\mathfrak{p} \subset \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$.

Se invece $s \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$, allora $\frac{s}{f^{\deg(s)}} \in \varphi(\mathfrak{p})$ e quindi esiste $s' \in \mathfrak{p}$ tale che $\frac{s'}{f^{\deg(s')}} = \frac{s}{f^{\deg(s)}}$. Questo vuole dire che esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$f^e(s' f^{\deg(s)} - s f^{\deg(s')}) = 0.$$

Allora $s' \in \mathfrak{p}$ e quindi anche $s f^{\deg(s')+e} \in \mathfrak{p}$. Ma $f^{\deg(s')+e} \notin \mathfrak{p}$ e quindi $s \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo. Insomma, abbiamo anche $\psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$. □

Quindi possiamo identificare un aperto $U = |\mathrm{Proj}(S)| \setminus V(f)$ con $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ come spazi topologici. Prendiamo la struttura di schema su U come quella di $\mathrm{Spec}(S[f^{-1}]_0)$ e chiamiamo $U = (\mathrm{Proj}S)_f$. Per ogni scelta di f_i tale che $(f_1, f_2, \ldots)$ ha radicale S_+, i $(\mathrm{Proj}S)_{f_i}$ danno un ricoprimento di $\mathrm{Proj}S$ con schemi affini. Per due di quelli aperti abbiamo che $(\mathrm{Proj}S)_f \cap (\mathrm{Proj}S)_g$ dentro $(\mathrm{Proj}S)_f$ è lo spettro di

$$S[f^{-1}]_0[(\frac{g}{f})^{-1}] = S[f^{-1}, g^{-1}]_0.$$

In particolare, possiamo incollare $(\mathrm{Proj}S)_f$ e $(\mathrm{Proj}S)_g$ lungo questi aperti affini e otteniamo una struttura di schema su $\mathrm{Proj}S$.

Si osserva che otteniamo un'inclusione $S_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}S}(\mathrm{Proj}S)$ che induce una mappa $\mathrm{Proj}(S) \to \mathrm{Spec}(S_0)$ che realizza $\mathrm{Proj}S$ come S_0-schema.

—

Lezione 3.11.

Definizione 3.3 (Morfismi proiettivi su schemi affini)**.** Sia $B = \mathrm{Spec}(A)$ uno schema affine. Allora un morfismo di schemi $\varphi\colon X \to B$ è proiettivo se $X = \mathrm{Proj}S$ per un anello graduato e finitamente generato da elementi in grado 1, tale che $A \simeq S_0$ e φ è il morfismo strutturale $\mathrm{Proj}S \to \mathrm{Spec}S_0$.

Esempio 3.4. Sia $S = \mathbb{C}[x, y]$ con la graduazione normale dato dal grado dei polinomi. Allora $S_+ = (x, y)$ e $\mathrm{Proj}(S) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Ideali massimali di $\mathbb{C}[x, y, z]$ hanno la forma $(x - c_1, y - c_2)$ per $c_i \in \mathbb{C}$; se $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, l'ideale non è omogeneo e altrimenti non è rilevante. Sia $f \in I$ con I omogeneo. Allora $f(x) = 0 \Rightarrow f(\lambda x) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Quindi per ogni punto x contenuto in $V(I) \subset \mathbb{A}^2$, $V(I)$ contiene anche la retta in x. Gli unici curve integrali in $\mathbb{A}^2$ per cui questa proprietà è vero, sono le rette che contengono l'origine. Quindi I punti chiusi hanno la forma $(ax + by)$ (che corrispondono al punto $[a : b]$ nei coordinati proiettivi classici di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$). L'unico punto non-chiuso è dato da (0). Le mappe della dimostrazione di Lemma 3.2 sono dati così: sia per esempio $f = x$. Allora

$$\varphi(ax + by) = (\frac{ax + by}{x}) = (a + b\frac{y}{x}) \subset \mathbb{C}[x, y][x^{-1}]_0 \simeq \mathbb{C}[\frac{y}{x}]$$

e

$$\psi(a + b\frac{y}{x}) = (ax + by).$$

L'anello S di $\mathrm{Proj}S$ si chiama l'anello delle coordinate omogenee. Diverso da $\mathrm{Spec}A$, S non è determinata da $\mathrm{Proj}S$:

Esempio 3.5. Sia

$$S^{(d)} = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} S_{d\nu}.$$

Allora $\mathrm{Proj}S = \mathrm{Proj}S^{(d)}$. Questo perché possiamo identificare affini aperti:

$$(\mathrm{Proj}S)_{f^d} = (\mathrm{Proj}S^{(d)})_f.$$

Gli elementi in $(\mathrm{Proj}S)_{f^d}$ sono ideali primi in $\mathrm{Spec}S[(f^d)^{-1}]_0$ quindi generato da elementi $\frac{s}{(f^d)^k}$ dove $kd = \deg(s)$. Invece gli elementi in $(\mathrm{Proj}S^{(d)})_f$ sono ideali primi in $\mathrm{Spec}S[(f)^{-1}]_0$ generato da elementi $\frac{s}{f^k}$ dove $kd = \deg(s)$ (nella vecchia graduazione). Un isomorfismo è dato da $f \mapsto f^d$.

Ma in generale $S^{(d)} \not\simeq S$. Per esempio, per $S = k[x,y]$, S è generato da 2 elementi (x,y) in grado 1 e $S^{(2)}$ da tre elementi (x^2, xy, y^2).

Commento 3.6. Anche se S e $S^{(d)}$ danno lo stesso Proj, in generale $\mathrm{Proj}(S)$ dipende dalla scelta della graduazione. Per esempio, se prendiamo $k[x,y,z]$ dove x,y,z hanno grado $a,b,c > 0$, allora oteniamo lo schema che si chiama piano proiettivo pesato $\mathbb{P}(a,b,c)$. Si puo realizzare come quotiente di $(k^3 \setminus \{0\})/(k^*)$ dove $\lambda(x,y,z) = (\lambda^a x, \lambda^b y, \lambda^c z)$. In generale $\mathbb{P}(a,b,c) \neq \mathbb{P}(a',b',c')$.

Commento 3.7. Si puo usare la costruzione di Esempio 3.5 per vedere che se S è un anello graduato finitamente generato allora esistono d tale che $S^{(d)}$ è finitamente generato da elementi di grado 1. Quindi, il fatto che supponiamo che S sia generato in grado 1 nella costruzione di $\mathrm{Proj}S$ non è una restrizione.

3.2. **Spazio proiettivo e sottoschemi chiusi.** Sia $S = A[x_0, \dots, x_n]$ graduato dal grado dei polinomi. Sia $U_i = (\mathrm{Proj}S)_{x_i}$. Allora

$$U_i = \mathrm{Spec}(S[x_i^{-1}]_0) = \mathrm{Spec}(A[x_0', \dots, \widehat{x}_i' \dots x_n']) \simeq \mathbb{A}^n_A$$

dove $x_j' = \frac{x_j}{x_i}$. In questo caso si scrive $\mathrm{Proj}S = \mathbb{P}^n_A$, lo spazio proiettivo, e si vede che è lo stesso schema che abbiamo ottenuto incollando i $\mathbb{A}^n$ in Sezione **??**. In particolare, la dimensione di $\mathbb{P}^n_A$ è n ovunque.

Sia I un ideale omogeneo di $A[x_0, \dots, x_n]$ e U_i un aperto come sopra. Allora definiamo

$$\widetilde{I}(U_i) = I \cdot A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}] \cap A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0.$$

Si verifica che gli ideali $\widetilde{I}(U_i)$ sugli aperti affini danno un fascio coerente $\widetilde{I}$ di ideali su $\mathbb{P}^n_A$ e quindi un sottoschema chiuso $V(\widetilde{I})$. Infatti, abbiamo che

$$V(\widetilde{I}) \simeq \mathrm{Proj}S/I.$$

Si nota anche che si puo ottenere $\widetilde{I}(U_i)$ mettendo $x_i = 1$ sotto l'identificazione $A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_0 \simeq A[x_0', \dots, x_n']$.

Nel altra direzione, dato un sottoschema chiuso $X \subset \mathbb{P}^n_A$ con fascio coerente di ideali $\mathcal{I}_X$, possiamo definire l'ideale $I(X)$ come gli elementi omogenei f di $A[x_0, \dots, x_n]$ tale che per ogni i abbiamo che

$$f|_{x_i=1} \in \mathcal{I}_X(U_i) \subset A[x_0', \dots, x_n'] \simeq A[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]_{(0)}.$$

Si controlla che se $I = I(X)$ allora $\mathcal{I}_X = \widetilde{I}$.

Esempio 3.8. L'ideale omogeneo $(x_0x_1 - x_2^2) \subset k[x_0, x_1, x_2]$ dá gli ideali $(x_0' - (x_2')^2), (x_1' - (x_2')^2)$ e $(x_0'x_1' - 1)$ nei tre aperti affini dati da $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$.

Esempio 3.9. Il complemento di un aperto affine U_i è, per definizione, $V(x_i)$. Questo è isomorfo a

$$\mathrm{Proj}(A[x_0, \dots, x_n]/(x_i)) \simeq \mathbb{P}^{n-1}_A.$$

Quindi la decomposizione $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{n-1} \cup \mathbb{A}^n$ che conosciamo dal contesto classico è vale anche su anelli più generale (per esempio $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$).

Osserviamo che la corrispondenza tra sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_A$ e ideali omogenei di $A[x_0, \dots, x_n]$ non è biettivo:

Esempio 3.10. Gli ideali (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) danno lo stesso sottoschema di $\mathbb{P}_k^2 = \mathrm{Proj}k[x_0, x_1]$: Nel aperto affine U_0, abbiamo che (x_0) e (x_0^2, x_0x_1) sono entrambi uguale a tutto l'anello $k[x_0, x_1, x_0^{-1}]$. Invece su U_1 abbiamo che x_1 è invertibile quindi $(x_0^2, x_0x_1) = (x_0^2, x_0) = (x_0)$. (Si nota che lo spettro degli ideali non è isomorfo: uno dà la rette $x = 0$, l'altro la stessa rette ma con un punto non-ridotto al'origine).

Per ristorare una biezione serve lo seguente definizione:

Definizione 3.11. Sia I und ideale omogeneo in $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora

$$\overline{I} = \{s \in S \mid \exists m, \forall i\colon\ x_i^m s \in I\}$$

denota la saturazione di I. L'ideale I si chiama saturato se $I = \overline{I}$.

Nel esempio precedente, la saturazione di (x_0^2, x_0x_1) è (x_0).

Esercizio 3.12. *Siano I e J ideali omogenei di $S = A[x_0, \dots, x_n]$. Allora*

(1) $\overline{I}$ è un ideale omogeneo
(2) $\mathrm{Proj}S/I = \mathrm{Proj}S/\overline{I}$
(3) $\mathrm{Proj}S/\overline{I} = \mathrm{Proj}S/\overline{J}$ se e solo se $\overline{I} = \overline{J}$.

Esercizio 3.13. *Ogni schema proiettivo su A si puó realizzare come sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$.*

Quindi otteniamo: ogni sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$ è proiettivo. E per ogni schema proiettivo X su A esiste un n tale che si puo realizzare X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_A^n$.

3.3. **Morfismi proiettivi e loro proprietá.** Usiamo questo oservazione per definire morfismi proiettivi in generale:

Definizione 3.14. Un morfismo tra schemi $X \to Y$ è proiettivo se è la composizione di un immersione chiuso $X \to \mathbb{P}_Y^n$ con il morfismo $\mathbb{P}_Y^n \to Y$.

Quindi si può pensare di un morfismo proiettivo $X \to Y$ come una famiglia di sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ parametrizzati da Y.

Qua $\mathbb{P}_Y^n$ si puo definire incollando gli $\mathbb{P}_{A_i}^n$ su un ricoprimento con affini $\mathrm{Spec}(A_i)$ di Y o come

$$\mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_\mathbb{Z}^n \times_\mathbb{Z} Y.$$

Un'altra differenza tra Spec e Proj sono i sezioni globali del fascio strutturale:

Proposizione 3.15. *Sia X uno schema integrale e proiettivo su k un campo algebraicamente chiuso. Allora $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Proof. Sia $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione regolare globalmente definito. Per definizione di morfismi proiettivi, possiamo vedere X come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}_k^n$ quindi $X = \mathrm{Proj}S$ con $S = k[x_0, \dots, x_n]/I$. Sia $X_i = X \cap U_i$ dove $U_i \subset \mathbb{P}_k^n$ sono gli apperti affini di prima. La restrizione di f a X_i dà un elemento di $\mathcal{O}_{X_i}(X_i) = S[x_i^{-1}]_0$. Quindi possiamo scrivere $f = \frac{g_i}{x_i^{N_i}}$ con $g_i \in S$ omogeneo di grado N_i. Siccome X è integrale, S è un dominio e segue che $x_i^{N_i} f \in S_{N_i}$ per ogni i.

Sia $N \geq \sum N_i$. Allora S_N è generato come spazio vettoriale su k di monomi di grado N e ogni monomio cosi ha un termine in cui il grado di un x_i è almeno N_i. Quindi $f \cdot S_N \subset S_N$ e anche $f^q S_N \subset S_N$ per ogni q (dove vediamo $f \in \mathcal{O}_X(X)$ e S_N entrambi nel campo di frazioni di S). In particolare, $x_0^N f^q \in S$ per ogni $q > 0$ e quindi il sottoanello $S[f]$ del campo di frazioni di S è contenuto in $x_0^{-N} S$: se $g \in S[f]$, allora

$$\begin{aligned} g &= s_0 + fs_1 + f^2 s_2 + \cdots = (x_0^N x_0^{-N})(s_0 + fs_1 + f^2 s_2 + \cdots) \\ &= x_0^{-N}(x_0^N s_0 + f x_0^N s_1 + f^2 x_0^N s_2 + \cdots) \in x_0^{-N} S. \end{aligned}$$

Visto che $x_0^{-N} S$ è un S-modulo finitamente generato e S è noeteriano, anche $S[f]$ è finitamente generato su S e otteniamo che f è integrale su S. Quindi ci sono elementi $a_i \in S$ tale che

$$f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Possiamo sostituire l'equazione con i parti in grado zero. Ma f stesso ha grado 0 e $S_0 = k$, quindi possiamo suppore che $a_i \in k$ senza cambiare l'equazione. Segue che f è integrale su k. Ma k è algebraicamente chiuso e quindi $f \in k$. □

Esercizio 3.16. *Sia $\psi\colon S \to T$ un morfismo di annelli graduati. Sia*

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(T) \mid \psi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Allora $U \subset \mathrm{Proj} S$ è aperto e ψ induce un morfismo

$$\varphi\colon U \to \mathrm{Proj}(S).$$

Commento 3.17. Il morfismo φ puó essere un isomorfismo, anche se ψ non lo è (simile a come abbiamo visto che $\mathrm{Proj} S = \mathrm{Proj} T$ non implica $S \simeq T$).

Esempio 3.18. Sia $\psi\colon k[x,y] \to k[x,y,z]$ l'inclusione. Allora $\psi(S_+) = \psi((x,y)) = (x,y)$ e $U = \mathbb{P}^2_k \setminus \{(x,y)\}$ con $\varphi\colon U \to \mathbb{P}^1_k$ dato in coordinati omogenei $[x : y : z] \mapsto [x : y]$.

Teorema 3.19. *Un morfismo proiettivo $\varphi\colon X \to Y$ tra schemi noeteriani è proprio.*

Proof. Per definizione di un morfismo proiettivo abbiamo che φ fattorizza come $X \to \mathbb{P}^n_Y \to Y$. Quindi otteniamo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

È sufficiente dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio usando Corollario 2.24: in questo caso il cambio di base è proprio, quindi $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ è proprio; il morfismo $X \to \mathbb{P}^n_Y$ è un immersione chiuso e quindi proprio; di consequenza anche $X \to Y$ come composizione di morfismi propri è proprio. Dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ è proprio lasciamo come esercizio.

□

Commento 3.20. Essere proiettivo e essere proprio sono molto simile ma si puó costruire esempi di schemi propri che non sono proettivi. Per una varietá astratta X si sa:

(1) Se X è di dimensione 1 e proprio allora è proiettivo.
(2) Se X è di dimensione 2, non-singolare e proprio allora è proiettivo.
(3) Ci sono esempi di X di dimensione 2, singolare e proprio ma non proiettivo.
(4) Ci sono esempi di X di dimensione 3, non-singolare e proprio ma non proiettivo.

Lezione 6.11.

3.4. **Proj globale.** Invece di costruire Proj di un anello graduato S su $\mathrm{Spec} S_0$, si puó anche costruire $\mathrm{Proj}\mathcal{F}$ di un fascio coerente graduato $\mathcal{F}$ su qualsiasi base B.

Un fascio quasicoerente graduato $\mathcal{F}$ su B è un fascio quasicoerente di $\mathcal{O}_B$-moduli $\mathcal{F}_\nu$ tale che

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_\nu$$

con $\mathcal{F}_\nu \mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_{\nu+\mu}$ e $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_B$. Quindi, dato un aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ si B, abbiamo che $\mathcal{F}(U)$ è un anello graduato con $\mathcal{F}(U)_0 = A$.

Mettiamo $X_U = \mathrm{Proj}\mathcal{F}(U)$, uno schema su U. Se $U \subset V$ è un inclusione di aperti affini, abbiamo la mappa di restrizione

$$\psi\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U).$$

La restrizione di ψ allo parte di grado 0 è la mappa di restrizione $\psi_0\colon \mathcal{O}_V(V) \to \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_U(U)$. In particolare, ψ manda l'ideale irrelevant nel ideale irrelevante e quindi induce un morfismo

$$\varphi\colon X_U \to X_V$$

che commuta con i morfismi $X_U \to U$, $X_V \to V$ e l'inclusione $U \hookrightarrow V$. Quindi possiamo usare i morfismi di restrizione per incollare i X_U in uno schema globale

$$X = \mathrm{Proj}\mathcal{F} \to B.$$

Esempio 3.21. Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$. Visto che $A[x_0, \dots, x_n] \simeq \mathrm{Sym}(A^{n+1})$ possiamo mettere

$$\mathbb{P}^n_B = \mathrm{Sym}(\mathcal{O}_B^{\oplus n+1}),$$

che dá una terza possibilitá di definire $\mathbb{P}^n_B$ per uno schema qualsiasi B.

Esempio 3.22. Piú generale, sia $\mathcal{E}$ un fascio coerente su B. Allora definiamo

$$\mathbb{P}\mathcal{E} = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E})) \to B,$$

il fibrato proiettivo associato a $\mathcal{E}$.

3.5. **Fasci invertibili da moduli graduati.** Come per Spec, si puó definire anche per Proj fasci (quasicoerenti) associato a un modulo, che in questo caso deve essere graduato:

Sia B uno schema, e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \dots$$

un fascio di $\mathcal{O}_B$ algebre graduate. Allora otteniamo come prima $\mathbb{P} = \mathrm{Proj}\mathcal{A}$ dato dal Proj globale. Sia $\mathcal{M}$ un fascio quasicoerente su B con una struttura di $\mathcal{A}$ modulo graduato; c'è con una decomposizione

$$\mathcal{M} = \dots \oplus \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_{i+1} \oplus \dots$$

con mappe

$$\mathcal{A}_j \otimes_B \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_{i+j}$$

che soddisfanno le proprietá di un modulo (distributivitá, associativitá, identitá).

Allora possiamo definire un fascio $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$ cosi: Sia $U \subset B$ un aperto affine. Quindi $\mathcal{A}(U)$ è un anello graduato. Per ogni elemento omogeneo $f \in \mathcal{A}(U)$ abbiamo un aperto affine

$$\mathbb{P}_{U,f} = (\mathrm{Proj}\mathcal{A}(U))_f = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0) \subset \mathbb{P}.$$

Allora i $\mathbb{P}_{U,f}$ danno un ricoprimento di aperti affini di $\mathbb{P}$ e $\mathcal{M}(U)$ è un $\mathcal{A}(U)$ modulo graduato su ogni U. Sia $\mathcal{M}_{U,f}$ il $\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0$-modulo

$$\mathcal{M}_{U,f} = (\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{A}(U)[f^{-1}])_0.$$

Associatio a $\mathcal{M}_{U,f}$ abbiamo un fascio quasicoerent su $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U)[f^{-1}]_0)$ e quelli si incollano per dare un fascio quasicoerente $\widetilde{\mathcal{M}}$ su $\mathbb{P}$.

Commento 3.23. Ogni fascio quasicoerente su $\mathrm{Proj}\mathcal{A}$ è ottenuto in questo modo. Ma due fasci di moduli $\mathcal{M}$ possono dare lo stesso fascio.

Commento 3.24. In caso che $B = \mathrm{Spec}(k)$, $\mathcal{A}$ è semplicemente una k-algebra graduato e $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-modulo graduato.

Esempio 3.25. Se prendiamo $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, otteniamo il fascio strutturale $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. Dato $\mathcal{M}$ come sopra definiamo $\mathcal{M}(n)$ come lo stesso fascio di moduli ma con graduazione

$$\mathcal{M}(n)_i = \mathcal{M}_{n+i}$$

e con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ lo fascio $\widetilde{\mathcal{A}}(n)$ associato a $\mathcal{A}(n)$.

Esempio 3.26. Sia $B = \mathrm{Spec}(k), \mathcal{A} = A = k[x,y]$ e $\mathcal{M} = M = A(1)$. Quindi $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1_k$ e $U = \mathrm{Spec}(k)$. Poi abbiamo

$$\mathbb{P}_{(\mathrm{Spec}(k),x)} = \mathrm{Spec}(k[x,y][x^{-1}]_0) \text{ e } \mathbb{P}_{(\mathrm{Spec}(k),y)} = \mathrm{Spec}(k[x,y][y^{-1}]_0)$$

e

$$M_{\mathrm{Spec}(k),x} = (k[x,y] \otimes_{k[x,y]} k[x,y][x^{-1}])_0 = \{\frac{f}{x^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x,y], \deg(f) \neq 0\}$$

perché $(k[x,y] \otimes_{k[x,y]} k[x,y][x^{-1}]) = k[x,y][x^{-1}]$ con $\deg(h \otimes \frac{g}{x^n}) = \deg(h) - 1 + \deg(g) - n$. Analogo per

$$M_{\mathrm{Spec}(k),y} = (k[x,y] \otimes_k k[x,y][y^{-1}])_0 = \{\frac{f}{y^{\deg(f)-1}} \mid f \in k[x,y], \deg(f) \neq 0\}.$$

Un elemento $\frac{f}{x^{\deg(f)-1}}$ definisce quindi anche un elemento $M_{\mathrm{Spec}(k),y}$ se e solo se $\deg(f) = 1$. O in altre parole, le sezioni globali $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ sono $k[x,y]_1$. Più in generale abbiamo

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = k[x_0, \dots, x_n]_m \text{ per ogni } m, n \geq 1.$$

Per $m > 0$, otteniamo in particolare che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ è generato da $k = \binom{n+m}{n}$ sezioni globali, dato da $x_0^{m_0} \dots x_n^{m_n}$ per ogni scelta di m_i tale che $\sum_i m_i = m$.

Se prendiamo invece $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ otteniamo sezioni locali $\frac{f}{x^{\deg(f)+1}}$ e $\frac{f}{y^{\deg(f)+1}}$ che non si estendono mai a sezioni globali. Anche qua abbiamo in generale

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \{0\} \text{ per ogni } m < 0.$$

Definizione 3.27. Sia X un Y-schema. Un fascio invertibile $\mathcal{P}$ su X si chiama molto ampio se esiste un immersione $i\colon X \to \mathbb{P}^n_Y$ tale che $\mathcal{P} \simeq i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_Y}(1)$. Il fascio si chiama ampio se $\mathcal{P}^{\otimes n}$ è molto ampio per un $n \in \mathbb{N}$.

Qua un morfismo si chiama un immersione se induce un isomorfismo tra X e un sottoschema aperto di un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_Y$.

Commento 3.28. Uno schema noetheriano X su k è proiettivo se e solo se X è proprio e ammette un fascio molto ampio: se X è proiettivo, allora X è proprio (Teorema 3.19) e per definizione l'inclusione $i\colon X \to \mathbb{P}^n_k$ dà il fascio molto ampio $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$. Vice versa, se X e proprio su k, anche $X \to \mathbb{P}^n_k$ è proprio (Corollario 2.24 (5)) e quindi ha immagine chiuso e definisce un immersione chiuso.

4. Divisori e fasci invertibili

4.1. **Divisori di Weil.** In questa sezione supponiamo che X sia uno schema integrale, noetheriano, separato che è regolare in codimensione 1 (l'ultima proprietà vuole dire che ogni anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ di dimensione 1 è regolare).

Definizione 4.1. Un divisore primo Y di uno schema X è un sottoschema integrale chiuso di codimensione 1. Un divisore di Weil è una combinazione lineare $D = \sum_{i=1}^n n_i Y_i$ di divisori primi Y_i con $n_i \in \mathbb{Z}$. D si chiama effetivo se $n_i \geq 0$ per ogni i. Si scrive $\mathrm{Div}(X)$ per il gruppo di divisori di Weil su X.

Una funzione razionale su X è un elemento del campo $K = \mathcal{O}_{\eta,X}$, dove η è il punto generico di X. Per ogni divisore primo D abbiamo il punto generico η_D di D e perché D ha codimensione 1, $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un anello di valutazione discreta con valutazione ν_D con campo di frazioni K (perché $\mathcal{O}_{\eta_D,X}$ è un dominio locale Noetheriano con ideale massimale principale e non è un campo). Definiamo l'ordine di zero/poli di una funzione razionale non-zero $f \in K^*$ lungo D come $\nu_D(f)$. C'è se $\nu_D(f) > 0$ diciamo che f ha un zero lungo D di ordine $\nu_D(f)$; e se $\nu_D(f) < 0$ diciamo che f ha un polo lungo D di ordine $-\nu_D(f)$.

Esempio 4.2. Se prendiamo come $D = \mathrm{Spec}(k[x,y]/(x)) \subset \mathrm{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2$, allora η_D è il punto dato dal ideale primo (x). Quindi $\mathcal{O}_{\eta_D,X} = k[x,y]_{(x)}$. Ogni elemeto in $f \in K = k(x,y)$ si può scrivere come $f = x^n g$ con $g \notin (x)$ e $\nu_D(f) = n$. Per esempio, $\nu_D(\frac{y}{x}) = -1$, $\nu_D(x^2 - y) = 0$ e $\nu_D(xy) = 1$.

Sempre con gli assunzioni su X di sopra abbiamo:

Lemma 4.3. *Sia $f \in K^*$. Allora ci sono solo un numero finito di divisori primi D tale che $\nu_D(f) \neq 0$.*

Proof. Per ogni aperto affine $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ abbiamo $K = \mathrm{Frac}(A)$. Possibilmente restringendo a U_f, possiamo scegliere $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ affine tale che f è regolare, c'è $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Il complemento $X \setminus U$ è chiuso e quindi un unione finito di componenti irreducibili (X è noetheriano). In particolare, esiste solo un numero finito di divisori primi D con $D \cap U = \emptyset$ e quindi è sufficiente mostrare l'affermazione per U. Visto che $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $\nu_D(f) \geq 0$. Poi $\nu_D(f) > 0$ se e solo se D è contenuto nello sottoschema chiuso Z di U definito da $f \cdot A$. Ma visto che X è noetheriano, Z contiene un numero finito di divisori primi. □

—

Lezione 13.11.

Quindi possiamo definire:

Definizione 4.4. (1) Dato $f \in K^*$, il divisore di Weil associato a f è

$$\operatorname{div}(f) = \sum_D \nu_D(f) D,$$

il divisore di zeri e poli di f. Un divisore D che ha la forma div per una funzione razionale $f \in K^*$ si chiama divisore principale.

(2) Due divisori di Weil D, D' si chiamano linearmente equivalente e scriviamo $D \sim D'$ se $D - D'$ è principale.

Se $f, g \in K^*$, abbiamo che $\nu_D(fg) = \nu_D(f) + \nu_D(g)$ e $\nu_D(1) = 0$. In altre parole, div definisce un morfismo di gruppi da K^* con la molteplicazione a $\operatorname{Div}(X)$ con l'addizione. Quindi l'immagine, i divisori principali, formano un sottogruppo e si scrive $\operatorname{Cl}(X)$ per il quoziente.

Esempio 4.5. (1) Per $X = \mathbb{A}^1_k$ abbiamo $K = k(x)$. Se prendiamo per esempio $f = x^2$, allora $\nu_D(f) = 0$ per $D \neq 0$ e $\nu_0(f) = 2$, e quindi $\operatorname{div}(f) = 2(0)$. Quindi $2(0) \sim 0$.

(2) Per $X = \mathbb{P}^1_k$ abbiamo anche $K = k(x)$. Se prendiamo un altra volta $f = x^2$, allora $\nu_D(f) = 0$ per $D \neq [1:0], [0:1]$ e $\nu_{[0:1]}(f) = -2$ e $\nu_{[1:0]}(f) = 2$, quindi $\operatorname{div}(f) = 2(0) - 2(\infty)$. Quindi $2(0) \sim 2(\infty)$.

Entrambi si puo generalizzare:

Esempio 4.6. Abbiamo che $\operatorname{Cl}(\mathbb{A}^n) = 0$. Sia $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{A}^n)$ un divisore primo. Allora $D = \operatorname{Spec}(k[x_1, \dots, x_n]/(f))$ per un polinomio f irreducibile e abbiamo $\operatorname{div}(f) = D$. Quindi ogni divisore primitivo è principale e quindi tutti i divisori di Weil sono principali.

Proposizione 4.7. *Sia $X = \mathbb{P}^n_k$ lo spazio proiettivo. Per un divisore di Weil $D = \sum n_i Y_i$ si definisce*

$$\deg(D) = \sum n_i \deg(Y_i).$$

Sia H l'iperpiano $x_0 = 0$. Allora

(1) Per ogni divisore D di grado d abbiamo $D \sim dH$
(2) Per ogni $f \in K^*$ abbiamo $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.
(3) La mappa $\deg\colon \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n_k) \to \mathbb{Z}$ è un isomorfismo.

Proof. Iniziamo con (2): Sia $S = k[x_0, \dots, x_n]$ tale che $\mathbb{P}^n_k = \operatorname{Proj}(S)$. Se $g \in S$ è omogeneo di grado n possiamo scrivere $g = g_1^{n_1} \cdot \dots \cdot g_r^{n_r}$ con g_i irreducibile. Allora g_i definisce un ipersuperfice Y_i di grado $\deg(g_i)$ e possiamo definire $\operatorname{div}(g) = \sum_i n_i Y_i$ con $\deg(\operatorname{div}(g)) = \sum n_i \deg(Y_i) = \deg(g)$. Una funzione razionale $f \in K^*$ è dato da un quotiente $\frac{g}{h}$ con g, h omogeneo e $\deg(g) = \deg(h)$. Visto che $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g) - \operatorname{div}(h)$ otteniamo $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.
Per (1), sia D un divisore di grado d. Possiamo scrivere $D = D_1 - D_2$ per divisori effetivi D_1, D_2 di grado d_1, d_2 con $d_1 - d_2 = d$. Possiamo scrivere $D_i = \operatorname{div}(g_i)$ con g_i omogeneo di grado d_i: ogni ipersuperfice irreducibile di $\mathbb{P}^n_k$ corrisponde a un ideale principale generato da un elemento omogeneo. Prendendo prodotti, segue che ogni sottoschema di codimensione 1 è dato come il luogo di zeri di un singolo polinomio omogeneo. Allora $D - hH = \operatorname{div}(f)$ dove $f = \frac{g_1}{g_2 x_0^d}$ è una funzione razionale su $\mathbb{P}^n$.

(3) segue da (1) e (2) osservando che $\deg(H) = 1$. □

Proposizione 4.8. *Sia $Z \subset X$ un sottoschema chiuso è $U = X \setminus Z$. Allora:*

(1) Il morfismo

$$\varphi\colon \operatorname{Cl}(X) \to \operatorname{Cl}(U), \sum n_i Y_i \mapsto \sum n_i (Y_i \cap U)$$

è suriettivo.

(2) se $\operatorname{codim}(Z, X) \geq 2$, allora φ è un isomorfismo.
(3) Se Z è irreducibile di codimensione 1 esiste una succesione esatta corta:

$$\mathbb{Z} \to \operatorname{Cl}(X) \to \operatorname{CL}(U) \to 0.$$

Proof. (1) Se Y è un divisore primo su X allora $U \cap Y$ è vuoto o un divisore primo su U. Se $f \in K^*$ è una funzione razionale con $\mathrm{div}(f) = \sum n_i Y_i$, possiamo vedere f anche come funzione razionale su U e otteniamo $\mathrm{div}_U(f) = \sum n_i(Y_i \cap U)$. Quindi φ definisce un morfismo. È suriettivo, perché ogni divisore primo di U è la restrizione della sua chiusura.

(2) Un divisore primo ha codimensione 1, quindi $U \cap Y$ non puó essere vuoto in questo caso e φ è anche iniettivo.

(3) Il nucleo di φ sono i divisori di Weil con supporto in Z. Se Z è irreducibile di codimensione 1, sono essatamente i moltipli di Z.

□

Esempio 4.9. Sia $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ e $X = \mathrm{Spec}(A)$ una superficie conica in $\mathbb{A}^3$. Allora $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ed è generato da una retta generatrice Y, per esempio dato da (y, z). Infatti, Proposizione 4.8 dà

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(X \setminus Y) \to 0. \tag{4}$$

Adesso Y come insieme è il luogo $y = 0$ su X. Come divisore invece abbiamo $\mathrm{div}(y) = 2Y$: l'anello locale a Y in X è dato da $A_{(y,z)} \simeq k[x, x^{-1}, z]$ con ideale massimale generato da z. Visto che $y = \frac{z^2}{x}$, y ha un zero di ordine 2 lungo Y.

Otteniamo che $X \setminus Y = \mathrm{Spec} A_y$ e $A_y = k[x, y, y^{-1}, z]/(xy - z^2)$. In A_y abbiamo $x = \frac{z^2}{y}$ e quindi $A_y \simeq k[y, y^{-1}, z]$. Segue che $\mathrm{Spec}(A_y)$ e un sottoschema aperto di $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[y, z])$ e quindi $\mathrm{Cl}(X \setminus Y) = 0$. Quindi otteniamo da (4) che $\mathrm{Cl}(X)$ è generato da Y e visto che $\mathrm{div}(y) = 2 \cdot Y$ abbiamo $2 \cdot Y = 0$ in $\mathrm{Cl}(X)$.

Rimane vedere che Y non è principale, che si puo dimostrare che in questo caso (X essendo normale) è equivalente a (y, z), l'ideale che definisce Y, è principale. Sia $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ l'ideale massimale del vertice di X. Allora $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è di dimensione 3 come spazio vettoriale su k generato dai immagini di x, y e z. Se Y fosse principale, allora l'immagine di (y, z) in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ avrebbe dimensione 0 o 1. Ma in questo caso lo contiene l'immagine di y e z, quindi ha dimensione 2 e (y, z) non è principale.

Esempio 4.10. Per un altro esempio, si puo calcolare che

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

dove ogni divisore D è l'insieme di zeri di un polinomio bi-omogeneo f e l'invariante che descrive $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(D)$ è il bigrado di f.

4.2. **Divisori di Cartier.** Adesso vogliamo introdurre una nozione di divisore che non ha bisogna dei restrizioni su X che erano necessario per i divisori di Weil (noetheriano, separato, integrale e regolare in codimensione 1).

Iniziamo con una generalizzazione del concetto del campo di funzioni: Sia X uno schema. Per $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ aperto affine sia $S \subset A$ l'insiemme di elementi che non sono divisori di 0 e sia $K(U)$ la localizazione di A in S. Piu generale, per un aperto $U \subset X$ qualsiasi, sia $S(U)$ l'insiemme di elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ che non sono divisori di zero in ogni anello locale $\mathcal{O}_x$ con $x \in U$. Allora gli anelli $S(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ formano un pre-fascio e chiamiamo il fascio associato $\mathcal{K}$ il fascio delle anelli totali delle frazioni (sheaf of total quotient rings). Chiamiamo $\mathcal{K}^*$ e $\mathcal{O}^*$ il fascio di elementi invertibili di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{O}_X$.

Definizione 4.11. Sia X uno schema. Un divisore di Cartier è una sezione globale del fascio $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.

Piu esplicitamente, un divisore di Cartier è dato da un ricoprimento aperto $X = \bigcup_i U_i$ e per ogni U_i un elemento $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$ (= una funzione razionale) tale che per ogni i, j abbiamo $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ (= una funzione regolare senza zeri).

Definizione 4.12. Un divisore di Cartier si chiama principale se è nel immagine della mappa

$$\mathcal{K}^*(X) \to \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*(X).$$

Due divisori di Cartier si chiamano linearmente equivalente se la loro differenza è un divisore principale.

In generale le nozione di divisori Cartier e Weil non coincidono (come abbiamo visto, il divisore di Weil in Esempio 4.9 non è principale vicino 0). Ma se supponiamo che X ha le proprietà per cui ha senso di parlare di divisori di Weil e di più che tutti i anelli locali $\mathcal{O}_{X,x}$ sono domini a fattorizzazione unica (in cui caso X si chiama localmente fattoriale), le due nozioni coincidono:

Proposizione 4.13. *Sia X integrale, separato, noetheriano, regolare in codimensione 1 e localmente fattoriale. Allora, il gruppo di divisori di Weil è isomorfo al gruppo di divisori di Cartier. Tramite questa identificazione, i divisori di Weil principali corrispondono ai divisori di Cartier principali.*

Commento 4.14. Infatti, regolare in codimensione 1 segue dalle altre assunzioni.

Commento 4.15. Visto che un anello locale regolare è un dominio a fattorizzazione unica, schemi regolari sono localmente fattoriali. Quindi una varietà regolare soddisfa le assunzioni della proposizione.

Proof. Visto che X è integrale, $\mathcal{K}$ corrisponde al fascio costante $\mathcal{K}(U) = K$, dove K è il campo di funzioni $K = \mathcal{O}_{X,\eta}$.

Dato un divisore di Cartier $\{(U_i, f_i)\}$ definiamo un divisore di Weil come segue. Per ogni divisore primo D prendiamo il coefficiente n_D come $\nu_D(f_i)$ per un U_i con $D \cap U_i \neq \emptyset$. Se abbiamo un altro j con $U_j \cap D \neq \emptyset$, allora f_i/f_j è invertibile su $U_i \cap U_j$ e quindi $\nu_D(f_i/f_j) = 0$ e $\nu_D(f_i) = \nu_D(f_j f_i/f_j) = \nu_D(f_j) + 0$. Quindi $\sum_D n_D D$ è ben definito. Perché X è noetheriano, segue che la somma è finita e quindi otteniamo un divisore di Weil associato al divisore di Cartier.

Viceversa, sia D un divisore die Weil su X e $x \in X$ un punto. Allora D definisce un divisore di Weil D_x su $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Ma $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio a fattorizzazione unica e quindi $\mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = 0$ (Esercizio). Quindi $D_x = \mathrm{div}(f_x)$ dove $f_x \in K$. Quindi la restrizione di D e $\mathrm{div}(f_x)$ coincidono su $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ quindi sono diversi solo rispetto a divisori primi D che non passano per x. C'è un numero finito di tali D che hanno un coefficiente non-zero in D o $\mathrm{div}(f_x)$ e quindi c'è un aperto U_x su cui D e $\mathrm{div}(f_x)$ coincidono. Variando x i U_x danno un ricoprimento di X e assieme con i f_x un divisore di Cartier. □

—

Lezione 17.11.

4.3. Fasci invertibili e sistemi lineari.

Definizione 4.16. Un fascio $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$ moduli su uno schema X si chiama localmente libero se esiste un ricoprimento di X con aperti U tale che $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U^{\oplus r}$. In questo caso, r si chiama il rango del fascio localmente libero. Se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango 1, si chiama invertibile.

Commento 4.17. Il nome 'invertibile' viene dal fatto che se $\mathcal{F}$ è invertibile esiste $\mathcal{F}^{-1}$ tale che $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$ (Esercizio). Quindi i fasci invertibili formano un gruppo tramite il prodotto tensoriale con elemento neutrale $\mathcal{O}_X$, che si chiama il gruppo di Picard $\mathrm{Pic}(X)$.

Esempio 4.18. I fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ definito in Esempio 3.25 sono invertibili con

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)$$

e piu generale

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n+m).$$

Sia D un divisore di Cartier dato da $\{(U_i, f_i)\}$ su uno schema X. Definiamo il sottofascio di $\mathcal{K}$ associato a D, $\mathcal{L}(D)$, come il sotto-$\mathcal{O}_X$-modulo generato da f_i^{-1} su U_i. Questo è ben definito, perché f_i/f_j è invertibile su $U_i \cap U_j$ e quindi f_i^{-1} e f_j^{-1} generanno lo stesso $\mathcal{O}_X$-modulo su $U_i \cap U_j$.

Esempio 4.19. Il divisore $D = 1 \cdot [1:0]$ su $\mathbb{P}^1$ è dato da $\{(U_x, y/x = y'), (U_y, 1)\}$. Quindi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)$ ha sezioni $\frac{f}{x^{\deg(f)}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{f}{x^{\deg(f)-1}y}$ su U_x e sezioni in $\mathcal{O}_{U_y}(U_y)$ su U_y. Molteplicazione con y da un isomorfismo con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ (cf. Esempio 3.26).

Proposizione 4.20. *Sia X uno schema. Allora.*

(1) *Per ogni divisore di Cartier D, $\mathcal{L}(D)$ è un fascio invertibile. La mappa $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ da una biiezione tra divisori di Cartier e sottofasci invertibili di $\mathcal{K}$.*
(2) $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.
(3) $D_1 \sim D_2$ *se e solo se* $\mathcal{L}(D_1) \simeq \mathcal{L}(D_2)$.

Proof. (1) Visto che $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$, la mappa $\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{L}(D)|_{U_i}, 1 \mapsto f_i^{-1}$ è un isomorfismo e quindi $\mathcal{L}(D)$ è invertibile. Il divisore di Cartier D può essere ricostruito da $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{K}$ prendendo come f_i su U_i l'inverso di un generatore locale che da per ogni sottofascio invertibile di $\mathcal{K}$ un divisore di Cartier.
(2) Se D_1 è localmente dato da f_i e D_2 da g_i, allora $D_1 - D_2$ è localmente dato da $f_i^{-1}g_i$ e quindi $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ come sottofascio di $\mathcal{K}$. Come fascio astratto questo è isomorfo a $\mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.
(3) Usando 2), è sufficiente dimostrare che $D = D_1 - D_2$ è principale se e solo se $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$. Se D è principale, D è definito da $f \in \mathcal{K}^*(X)$. Allora $\mathcal{L}(D)$ è globalmente generato da f e $1 \mapsto f^{-1}$ da un isomorfismo $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}(D)$. Viceversa, dato un tale isomorfismo, l'immagine di 1 da un elemento di $\mathcal{K}^*(X)$ che definisce D.

□

Corollario 4.21. *Su ogni schema X, $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ da un morfismo iniettivo tra il gruppo* $\mathrm{CaCl}(X)$ *di divisori di Cartier modulo equivalenza lineare in* $\mathrm{Pic}(X)$.

Commento 4.22. In generale, la mappa $\mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ non è suriettivo, perchè è possibile che esistono fasci invertibili che non si puo realizzare come sottofaschi di $\mathcal{K}^*$. Ma per esempio se X è integrale, la mappa è suriettiva.

Esempio 4.23. $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$ dove $1 \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$: Abbiamo visto che $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$ generato dalla classe di un iperpiano. Visto che $\mathbb{P}^n_k$ è integrale è localmente fattoriale abbiamo

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{CaCl}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k).$$

Tramitte queste identificazioni, l'iperpiano corrisponde a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$ (cf. Esempio 4.19 per $n = 1$).

Una raggione per cui fasci invertibili sono utili è che si può usargli per descrivere morfismi in $\mathbb{P}^n$.

Definizione 4.24. Un fascio $\mathcal{F}$ su X si chiama globalmente generato se ci sono sezioni globali $\{s_i\}_i$ in $\Gamma(X, \mathcal{F})$ tale che per ogni $x \in X$ la spiga $\mathcal{F}_x$ è generato dagli immagini delle s_i in $\mathcal{O}_{X,x}$.

Proposizione 4.25. *Sia A un anello e X uno schema su A.*

(1) *Sia $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ un A-morfismo. Allora $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ è un fascio invertibile generato da sezioni globali $s_i = \varphi^* x_i$, $i = 0, \dots, n$.*
(2) *Viceversa, se $\mathcal{L}$ è un fascio invertibile su X e $s_0, \dots, s_n$ sezioni globali che generano $\mathcal{L}$, allora esiste un unico A-morfismo $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ tale che $\mathcal{L} \simeq \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ e $s_i = \varphi^* x_i$.*

Proof. (1) Sappiamo già che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ è invertibile e che i x_i definiscono sezioni globali. Visto che non c'è un punto in cui i x_i vaniscono, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ è globalmente generato dai x_i. Quindi le stesse proprietà sono anche vero per il pull back $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ e $\varphi^* x_i$.
(2) Viceversa, sia $\mathcal{L}$ globalmente generato da sezioni globali $s_0, \dots, s_n$. Per ogni i sia

$$X_i = \{x \in X \mid (s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}.$$

Allora X_i è aperto e siccome i s_i generanno $\mathcal{L}$, i X_i danno un ricoprimento di X. Definiamo un morfismo $\varphi_i\colon X_i \to U_i$ dove $U_i \simeq \mathrm{Spec}(A[x'_1, \dots, x'_n])$ è l'aperto affine standard con $x'_j = \frac{x_j}{x_i}$: φ_i è dato dal morfismo su anelli

$$A[x'_1, \dots, x'_n] \to \mathcal{O}_{X_i}(X_i), x'_j \mapsto s_j / s_i.$$

Incollando i φ_i dà il morfismo $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_A$ che cerchiamo.

□

Esempio 4.26. Se prendiamo $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ abbiamo una base delle sezioni globali dato da x^3, x^2y, xy^2, y^3. La mappa che corrisponde a questi sezioni è $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, [x : y] \mapsto [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$ (twisted cubic). Se prendiamo invece solo x^3, y^3 otteniamo la mappa $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, [x : y] \mapsto [x^3 : y^3]$.

Commento 4.27. Se $\mathcal{L}$ non è generato dai $s_0, \ldots, s_n$, allora nonostante definiscono un morfismo $U \to \mathbb{P}^n_k$ dove $U \subset X$ è l'aperto (possibilmente vuoto) su cui i s_i generanno $\mathcal{L}$ (= i punti di X dove almeno una dei s_i non vanisce).

Commento 4.28. Un fascio molto ampio quindi in particolare è generato da sezioni globali. Il viceversa non è sempre vero, perché il morfismo in Proposizione 4.25 non è necessariamente un immersione (come la mappa $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ nel esempio precedente).

Proposizione 4.29. *Sia k algebraicamente chiuso, X uno schema proiettivo su k e $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_k$ un morfismo che corrisponde a $\mathcal{L}$ e $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ come sopra. Sia $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ il sottospazio generato dai s_i. Allora φ è un'immersione chiusa se e solo se*

(1) elementi di V separano punti: per ogni due punti distinti chiusi $p, q \in X$ esiste $s \in V$ tale che $s \in \mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p$ ma $s \notin \mathfrak{m}_q\mathcal{L}_q$ o viceversa; e

(2) elementi di V separanno vettori tangenti: per ogni punto chiuso $p \in X$, l'insieme $\{s \in V \mid s_p \in \mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p\}$ genera $\mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p/\mathfrak{m}_p^2\mathcal{L}_p$ come spazio vettoriale su k

Proof. Saltato, cf. Hartshorne Proposition II.7.3. □

Definizione 4.30. Un divisore di Cartier D dato da $\{(U_i, f_i)\}_i$ si chiama effetivo se $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Il sottoschema chiuso Y associato a D è il sottoschema che corrisponde al fascio di ideali $\mathcal{I}_Y$ localmente generato dai f_i. In questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{L}(-D)$.

Sia $\mathcal{L}$ un fascio invertibile e $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ una sezione globale non-zero. Definiamo un divisore di Cartier effetivo $(s)_0$ associato a s come segue. Sia U un aperto di X su cui $\mathcal{L}$ è triviale e sia $\varphi\colon \mathcal{L}|_U \to \mathcal{O}_U$ una trivializazione. Allora $\varphi(s) \in \mathcal{O}_U(U)$. Variando U, la collezione $\{(U, \varphi(s))\}$ definisce un divisore di Cartier effetivo.

Esempio 4.31. Sia $D = 1 \cdot [1 : 0]$ come in Esempio 4.19. Sezioni di $\mathcal{L}(D)$ sono $\frac{f}{x^{\deg(f)}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{f}{x^{\deg(f)-1}y}$ su U_x e $\mathcal{O}_{U_y}(U_y)$ su U_y. Quindi una trivilalizzazione è dato da moltiplicazione con $\frac{y}{x}$ su U_x e 1 su U_y. Una sezione globale è per esempio dato da $s = \frac{x}{y}$ che ha divisore associato $[1 : 0]$ (che non è diverso dal divisore principale associato a $\frac{x}{y}$ visto come funzione razionale).

Proposizione 4.32. *Sia X una varietà non-singolare proiettiva su un campo algebraicamente chiuso k. Sia D un divisore su X e $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(D)$. Allora:*

(1) per ogni sezione globale non-zero $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ abbiamo $(s)_0 \sim D$
(2) ogni divisore effetivo che è linearmente equivalente a D è $(s)_0$ per un $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ e
(3) due sezioni $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ danno lo stesso divisore se e solo se $s = \lambda s'$ per un $\lambda \in k^*$.

Proof. (1) Visto che $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(D)$, possiamo vedere $\mathcal{L}$ come sottofascio di $\mathcal{K}$. Siccome X è una varietà e quindi integrale, $\mathcal{K}$ è il fascio costante, dato da K. Quindi possiamo vedere s come un elemento di K, una funzione razionale su X.

Se D è dato da $\{(U_i, f_i)\}_i$, allora $\mathcal{L}$ è localmente generato da f_i^{-1} e otteniamo un isomorfismo locale $\mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ dato da molteplicazione con f_i. Quindi $D' = (s)_0$ è localmente definito da $f_i f$ e $D' = D + \operatorname{div}(f)$.

(2) Viceversa, se D' è effetivo con $D' = D + \operatorname{div}(f)$ allora il ordine di poli di f lungo un divisore Y e minore o uguale a quello delli f_i che localmente definiscono D. Quindi possiamo vedere f come una sezione globale di $\mathcal{L}(D)$.

(3) Se $(s)_0 = (s')_0$ allora s e s' corrispondono a funzioni razionali $f, f' \in K$ tale che $\operatorname{div} \frac{f}{f'} = 0$. Quindi $\frac{f}{f'} \in \mathcal{O}_X^*(X)$. Ma visto che X è proiettivo e k algebraicamente chiuso, segue $\frac{f}{f'} \in k^*$ usando Proposizione 3.15.

□

Definizione 4.33. Un sistema lineare completo $|D|$ su una varietà proiettiva nonsingolare è l'insieme di tutti divisori effetivi $D' \sim D$.

Dalla proposizione precedente segue che $|D| \simeq \mathbb{P}\Gamma(X, \mathcal{L}(D))$. Piu general, un sistema lineare $\mathfrak{d}$ è un sottospazio lineare di $|D|$. La dimensione di un sistema lineare è la sua dimensione come spazio lineare proiettivo.

Definizione 4.34. Un punto $p \in X$ si chiama punto di base di un sistema lineare $\mathfrak{d}$ se p è contenuto nel supporto di ogni divisore $D \in \mathfrak{d}$.

Commento 4.35. $p \in X$ è punto di base se e solo se per ogni $s \in V$ abbiamo che $s_p \in \mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p$. In particolare $\mathfrak{d}$ è senza punti di base se e solo se $\mathcal{L}$ è generato dai sezioni in V.

Commento 4.36. Possiamo riformulare Proposizione 4.29 in questo linguaggio: Sia $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ un morfismo che corrisponde al sistema lineare senza punti di base $\mathfrak{d}$. Allora φ è un imersione chiusa se e solo se

(1) $\mathfrak{d}$ separa punti: per ogni $p, q \in X$ esiste $D \in \mathfrak{d}$ con $p \in \operatorname{supp}(D)$ ma $q \notin \operatorname{supp}(D)$.
(2) $\mathfrak{d}$ separa vettori tangenti: per ogni $p \in X$ e $t \in T_pX = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ esiste $D \in \mathfrak{d}$ tale che $P \in \operatorname{supp}(D)$ ma $t \notin T_p(D)$ (dove per l'ultima affermazione vediamo D come un sottoschema chiuso, localmente principale).

Esempio 4.37. Il morfismo $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ dato da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ e x^3, x^2y, xy^2, y^3 di esempio 4.26 da un immersione chiusa. Il sistema lineare in questo caso sono i luoghi di zeri di polinomi omogenei di grado 3 quindi tutti i divisori di grado 3 su $\mathbb{P}^1$. Questi divisori si può anche vedere come i intersezioni di $\varphi(\mathbb{P}^1)$ con iperpiani in $\mathbb{P}^3$.

Il morfismo $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ dato dalle sezioni x^3, y^3 non è un immersione chiusa. Per $[0:1]$ e $[1:0]$ non separa vettori tangenti, mentre per ogni altro punto ci sono 3 punti nella fibra di φ e quindi in questo caso φ non separa punti.

—

Lezione 20.11.

5. Panoramica su argumenti scelti

5.1. **Coomologia.** ...

5.2. **Fascio canonico e geometria birazionale.** Sia A un anello (commutativo con 1), B una A-algebra e M un B-modulo.

Definizione 5.1. Una A-derivazione di B in M è un morfismo $d\colon B \to M$ tale che:

(1) d è additivo,
(2) $d(bb') = b'db + bdb'$, e
(3) $da = 0$ per ogni $a \in A$

Definizione 5.2. Il modulo di forme differenziali di B su A è un B-modulo $\Omega_{B/A}$ assieme con una A-derivazione $d\colon B \to \Omega_{B/A}$ che soddisfa lo seguente proprietà universale: per ogni B-modulo M e A-derivazione $d'\colon B \to M$ esiste un unico morfismo di B-moduli $f\colon \Omega_{B/A} \to M$ tale che $d' = f \circ d$.

Non è difficile vedere che il modulo di forme differenziali sempre esiste ed è unico.

Proposizione 5.3. *Sia B una A-algebra, $f\colon B \otimes_A B \to B$ il morfismo dato da $f(b \otimes b') = bb'$ e $I = \ker(f)$. Allora $(I/I^2, d)$ è il modulo di forme differenziali, dove $d\colon B \to I/I^2, b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1$.*

Definizione 5.4. Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di schemi e $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ la diagonale. Allora $\Delta(X)$ è localmente chiuso (= un chiuso di un aperto U). Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali di $\Delta(X)$ in U. Allora definiamo il fascio $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ delle differenziali relative di X su Y.

Commento 5.5. Se $X = \mathrm{Spec} B, Y = \mathrm{Spec} A$ sono affini, allora $\Delta(X)$ è il fascio definito come nucleo del morfismo $B \otimes_A B \to B, b \otimes b' \mapsto bb'$. Quindi $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ è il fascio associato a I/I^2 di Proposizione 5.3 e $\Omega_{X/Y} \simeq \widetilde{\Omega}_{B/A}$. Una definizione alternativa di $\Omega_{X/Y}$ è definirlo su aperti affini in questo modo, e poi incollare i pezzi affini. In particolare, $\Omega_{X/Y}$ è quasicoerente (e coerente se f è di tipo finito e Y noeteriano).

Teorema 5.6. *Sia X una varietà su k. Allora X è non-singolare se e solo se $\Omega_{X/k}$ è localmente libero di rango $n = \dim(X)$.*

Definizione 5.7. Sia X una varietà non-singolare. Allora definiamo il fascio tangenziale di X come

$$\mathcal{T}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$$

(che è localmente libero di rango $n = \dim(X)$). Definiamo lo fascio canonico di X come

$$\omega_X = \bigwedge^n \Omega_{X/k}.$$

Il fascio canonico è un fascio invertibile. Se X è proiettivo, definiamo il genere geometrico di X come

$$p_g = \dim(\Gamma(X, \omega_X)).$$

Visto che $\Omega_{X/Y}$ è definito usando solo X, p_g è una invariante di X e non cambia tramitte isomorfismi. Meno chiaro è:

Teorema 5.8. *Siano X e X' varietà proiettive, non singolari, birazionalmente equivalente (c'è esiste $\varphi\colon U \to U'$ isomorfismo con $U, U' \subset X, X'$ aperti densi). Allora $p_g(X) = p_g(X')$.*

Proof. Sia $V \subset X$ l'aperto denso più grande su cui φ è definito. Abbiamo (in generale) un morfismo $\varphi^*\Omega_{X'/k} \to \Omega_{V/k}$. Quelli sono fasci localmente liberi dello stesso rango, quindi otteniamo un morfismo indotto sul prodotto esterno, $\varphi^*\omega_{X'} \to \omega_V$, che induce una mappa su sezioni globali $\varphi^*\colon \Gamma(X', \varphi^*\omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$. Visto che $U \simeq U'$ tramitte φ abbiamo che $\omega_V|_U \simeq \omega_{X'}|_{U'}$. Una sezione globale non-zero di un fascio invertibile non puo essere zero su un denso aperto. Quindi otteniamo che $\varphi^*\colon \Gamma(X', \varphi^*\omega_{X'}) \to \Gamma(V, \omega_V)$ è iniettivo.

Adesso confrontiamo $\Gamma(V, \omega_V)$ e $\Gamma(X, \omega_X)$. Inanzitutto, osserviamo che $X \backslash V$ ha codimensione almeno 2 in X: se $p \in X$ ha codimensione 1, allora $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello di valutazione discreta. Abbiamo già una mappa dal punto generico di X in X' e quindi anche del punto generico di $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p})$; ma X' e proiettivo e quindi proprio su k e il criterio valutativo di proprietezza ci dice che esiste un'unica mappa $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p}) \to X'$ che estende la mappa sul punto generico. Questa mappa estende a un aperto che contiene P e quindi $P \in V$ perché abbiamo scelto V massimale.

Per finire vogliamo dimostrare che la mappa di restrizione $\Gamma(X, \omega_X) \to \Gamma(V, \omega_V)$ è biietivo. Basta dimostrare che per ogni aperto affine $U \subset X$ con $\omega_X|_U \simeq \mathcal{O}_U$ abbiamo che $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \to \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{U\cap V})$ è biiettivo. In generale, la mappa è iniettiva perchè una sezione globale non-zero di un fascio invertibile non può essere zero su un denso aperto. Per vedere che è suriettivo usiamo che X è non-singolare e $X \setminus V$ ha codimensione almeno 2: sia $f \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{U\cap V})$ e $U = \mathrm{Spec}(A)$. Siccome $X \setminus V$ ha codimensione almeno 2, $f \in A_\mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p} \subset A$ ideale primo di altezza 1. Ma X non singolare implica che A è integralmente chiuso (X è normale) e in questo caso abbiamo

$$A = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_\mathfrak{p}$$

dove l'intersezione è preso su tutti ideali primi di altezza 1. □

Si dice che p_g è un'invariante birazionale di X.

Esempio 5.9. Per $X = \mathbb{A}^n_k$ il fascio canonico $\Omega_{X/k}$ è libero di rango n, generato dai $dx_1, \ldots, dx_n$.

Esempio 5.10. Sia $X = \mathbb{P}^r_k$ e U_i l'aperto affine standard con $x_i \neq 0$. Siano $(u_1, \cdots, u_r)$ e $(w_1, \cdots, w_r)$ coordinati su U_0 e U_1. Quindi $u_1 = \frac{1}{w_1}$ e $u_i = \frac{w_i}{w_1}$. Il fascio canonico su U_0 e U_1 è generato da $\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_r$ e $\mathrm{d}w_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w_r$, rispettivamente. Inserendo i funzioni di transizione, otteniamo $\mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}\frac{1}{w_1} = \frac{-1}{w_1^2}\mathrm{d}w_1$ e $\mathrm{d}u_i = \mathrm{d}\frac{w_i}{w_1} = \frac{-w_i}{w_1^2}\mathrm{d}w_1 + \frac{1}{w_1}\mathrm{d}w_i$. Quindi

$$\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_r = \frac{-1}{w_1^{r+1}}\mathrm{d}w_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}w_r.$$

C'è, $\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_r$ non ha zeri o poli su U_0 ma un polo di ordine $r+1$ lungo il divisore $x_0 = 0$. Concludiamo che $\omega_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)$. Visto che $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-r-1)) = 0$ abbiamo che $p_g = 0$.

Per un A-modulo B e un ideale $I \subset B$ abbiamo una sequenza esatta

$$I/I^2 \to^{\delta} \Omega_{A/B} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to 0$$

dove $C = B/I$ e $\delta(b) = db \otimes 1$. Sul livello di fasci questo ci dà per ogni sottoschema chiuso Z di X con fascio di ideali $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z/k} \to 0$$

Teorema 5.11. *Sia X una varietà nonsingolare su k e $Z \subset X$ un chiuso irreducibile definito da un fascio di ideali $\mathcal{I}$. Allora Z è nonsingolare se e solo se*

(1) $\Omega_{Z/k}$ è localmente libero, e
(2) la seguenza di sopra è esatto anche a sinistra:

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z/k} \to 0$$

Corollario 5.12. *(formula di aggiunzione) Sia X una varietà nonsingolare e $Z \subset X$ chiuso nonsingolare di codimensione r. Allora $\omega_Z \simeq \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Z/X}$. Se $r = 1$ possiamo vedere Z come divisore e sia $\mathcal{L}$ il fascio associato a Z. In questo caso $\omega_Z \simeq \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Z$.*

Definizione 5.13. Sia $Z \subset X$ chiuso e nonsingolare con X una varietà nonsingolare su k. Allora $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ si chiama il fascio conormale e il duale

$$\mathcal{N}_{Z/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Z)$$

si chiama il fascio normale di Z in X. $\mathcal{N}_{Z/X}$ è localmente libero di rango $\operatorname{codim}(Z, X)$.

Esempio 5.14. Sia Z una ipersuperfice nonsingolare di grado d in $X = \mathbb{P}^n_k$. Allora $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(Z) \otimes \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X(-r-1) \otimes \mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Z(d-r-1)$.

(1) $r = 2, d = 1$: Z è una retta in $\mathbb{P}^2$ e $\omega_Z = \mathcal{O}_Z(-2)$.
(2) $r = 2, d = 2$: Z è una conica in $\mathbb{P}^2$ e $\omega_Z = \mathcal{O}_Z(-1)$. Infatti, è l'immagine di $\mathbb{P}^1$ tramite $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.
(3) $r = 2, d = 3$: abbiamo $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$. In particolare $p_g = 1$ e una cubica liscia non è birazionale a $\mathbb{P}^1$ (si dice: non è razionale).
(4) $r = 2, d \geq 4$: in questi casi $d - r - 1 > 0$ e quindi anche qua $p_g > 0$ e Z non è razionale. Si puo dimostrare che $p_g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.
(5) $r = 3, d = 1$: $Z \simeq \mathbb{P}^2$ e $\omega_Z = \mathcal{O}_Z(-3)$.
(6) $r = 3, d = 2$: $\omega_Z = \mathcal{O}_Z(-2)$ e in questo caso $Z \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Abbiamo che Z è razionale e quindi $p_g = 0$ (ma Z non è isomorfo a $\mathbb{P}^2$, solo birazionalmente equivalente).
(7) $r = 3, d = 3$: $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-1)$ e anche in questo caso Z è razionale.
(8) $r = 3, d = 4$: $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z$ e quindi Z non è razionale. Infatti è una superfice K3.
(9) $r = 3, d \geq 5$: $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(d-4)$ con $d - 4 > 0$. In questo caso il fascio canonico è molto ampio, e varietà con questa proprietà si chiamano di tipo generale.
(10) $r = 4, d = 3, 4$: ω_Z in questo caso è $\mathcal{O}_Z(-1)$ o $\mathcal{O}_Z(-2)$ e quindi $p_g = 0$. È un risultato molto importante delli anni '70 che Z in generale non è razionale in questo caso.
(11) $r = 5, d = 3$: $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-3)$ e quindi $p_g = 0$. Una dimostrazione che in generale Z non è razionale in questo caso è stato annunciato questo anno.

—

Lezione 1.12.

5.3. **Piatezza e famiglie di varietà.**

Definizione 5.15. Sia $X \subset \mathbb{P}^n_k$ un sottoschema chiuso. Allora la funzione di Hilbert è definita come

$$F_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, m \mapsto \dim \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$$

Si osserva che la funzione di Hilbert non è un'invariante di X come schema astratto, ma del modello proiettivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$.

Teorema 5.16. *La funzione F_X coincide con un polinomio P_X per $m >> 0$.*

Il polinomio P_X si chiama polinomio di Hilbert.
Se $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali che definisce X, abbiamo una sequenza corta esatta

$$0 \to \mathcal{I}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to \mathcal{O}_X(m) \to 0$$

che dà una sequenza lunga in coomologia

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m)) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \\ \to \quad & H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $F_X(m) = h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) - h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m)) + h^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$.
Un modo per dimostrare il teorema è dimostrare che $h^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m)) = 0$ per $m >> 0$ e che $h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) - h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m))$ è un polinomio. Quindi $P_X(m) = h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) - h^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}(m))$, o in altre parole, la dimensione dello spazio delle ipersuperfici di grado m, meno la dimensione dello spazio di quelli che vaniscono su X.

Proposizione 5.17. *La dimensione n di X è uguale al grado di P_X. Il grado di X è uguale a $n!$ volte il coefficiente principale di P_X. Cioè,*

$$P_X(m) = \frac{\deg(X)}{\dim(X)!} m^{\dim(X)} + \textit{ termini di ordine più piccolo}$$

Definizione 5.18. Il genere aritmetico di $X \subset \mathbb{P}^n_k$ è

$$p_a = (-1)^n (P_X(0) - 1).$$

Commento 5.19. Se X è proiettivo, in generale $p_a(X) \neq p_g(X)$ anche se X è regolare. Ma per curve regolari abbiamo $p_a(X) = p_g(X)$.

Esempio 5.20. Se $X = \mathbb{P}^n_k$, allora $F_X(m) = P_X(m) = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)}{n!}$. Quindi, $p_a(\mathbb{P}^n_k) = 0$ e per esempio $F_{\mathbb{P}^1}(m) = m + 1$.

Esempio 5.21. Siano $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2_k$ tre punti e X la loro unione. Calcoliamo prima $P_X(m)$: $h^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = \binom{2+m}{2}$ e $h^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{I}(m)) = \binom{2+m}{2} - 3$. Quindi $P_X(m) = 3$. Se $m \geq 2$ abbiamo $P_X(m) = F_X(m) = 3$ perchè si puo trovare per ogni scelta di due dei tre punti una conica che vanisce sui due punti ma non sul terzo. Per $m = 1$ invece abbiamo $F_X(1) = 3$ se i punti non sono collineari (in questo caso $h^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{I}(1)) = 0$) e $F_X(1) = 2$ se i punti sono collineari (in questo caso $h^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{I}(1)) = 1$ e si pu'o controllare che $H^0(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ è suriettivo).

Esempio 5.22. Se $C \in \mathbb{P}^2_k$ è una curva di grado d, abbiamo che $\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)$. In particolare, $H^1(\mathbb{P}^2_k, \mathcal{I}(m)) = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} F_X(m) = P_X(m) \quad &= \quad \binom{m+2}{2} - \binom{m+2-d}{2} = \frac{(m+2)(m+1) - (m+2-d)(m+1-d)}{2} \\ &= \quad \frac{2dm + 3d - d^2}{2} = dm - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Adesso vogliamo definire un concetto che ci permette di definire 'famiglie continue' di schemi. La condizione che si usa normalmente e quella di preservare il polinomio di Hilbert delle fibre, e si chiama famiglie piatte.

Definizione 5.23. Sia A un anello e M un A-modulo. M si chiama piatto (su A) se il funtore $N \mapsto M \otimes_A N$ è esatto, dove il dominio del funtore sono A-moduli.

In generale, $\cdot \otimes_A N$ è esatto di destra (preserva suriettività) ma non di sinistra.

Esempio 5.24. Se prendiamo $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$, la mappa indotta $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non è iniettiva.

Commento 5.25. Un A-modulo N è piatto se e solo se $\mathfrak{a} \otimes N \to A \otimes N = N$ è iniettivo per ogni ideale finitamente generato $\mathfrak{a} \subset A$. Se adesso A è un dominio di ideali principali, allora un A-modulo N è piatto se e solo se è senza torsione ($\nexists n \in N$ con $an = 0$). Infatti, sia $\mathfrak{a} = (t)$ principale e consideriamo $\mathfrak{a} \otimes N \to N$. Questo è iniettivo per ogni $\mathfrak{a}$ finitamente generato se e solo se N non ha torsione.

Definizione 5.26. Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di schemi e $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-modulo. Diciamo che $\mathcal{F}$ è piatto su Y vicino un punto $x \in X$ se $\mathcal{F}_x$ è piatto come $\mathcal{O}_{Y,y}$-modulo tramitte la mappa $f^\#\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ dove $y = f(x)$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è piatto su Y se lo è vicino ogni punto di X. Diciamo che X è piatto su Y se $\mathcal{O}_X$ lo è.

Proposizione 5.27. *Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di schemi con X ridotto e Y integrale e nonsingolare di dimensione 1. Allora f è piatto se e solo se mappa il punto generico di ogni componente di X nel punto generico di Y.*

Proof. I punti generici x di X sono i punti per cui $\mathfrak{m}_x$ è un primo associato a (0) in $\mathcal{O}_{X,x}$; o in altre parole, per cui $\mathfrak{m}_x$ contiene solo divisori di zero.

Supponiamo prima che f è piatto. Sia $x \in X$ un punto in X tale che $f(x) = y$ è un punto chiuso. Allora $\mathcal{O}_{Y,y}$ è un anello di valutazione discreta. Sia $t \in \mathfrak{m}_y \setminus \mathfrak{m}_y^2$. Allora t non è un divisore di 0 in $\mathcal{O}_{Y,y}$. Visto che f è piatto, anche $f^\# t \in \mathcal{O}_{X,x}$ non è un divisore di 0. Quindi x non è un punto generico di X.

Viceversa, supponiamo che f manda ogni punto generico di X nel punto generico di Y. Dobbiamo mostrare che per ogni $x \in X$ con $y = f(x)$, $\mathcal{O}_{X,x}$ è piatto su $\mathcal{O}_{Y,y}$. Se y è il punto generico, $\mathcal{O}_{Y,y}$ è un campo e tutti moduli sono piatti su un campo. Quindi supponiamo che y è chiuso e $\mathcal{O}_{Y,y}$ un anello di valutazione discreta. Usando Commento 5.25, dobbiamo dimostrare che $\mathcal{O}_{X,x}$ è senza torsione. Se $\mathcal{O}_{X,x}$ contiene torsione, dobbiamo avere che $f^\# t$ è un divisor di zero dove $t \in \mathfrak{m}_y \setminus \mathfrak{m}_y^2$. Segue che $f^\# t$ è contenuto in un ideale primo $\mathfrak{p}$ associato a (0) in $\mathcal{O}_{X,x}$. Adesso $\mathfrak{p}$ dà un punto generico di X con imagine y, che dà una contradizione. ☐

Teorema 5.28. *Sia T uno schema integrale noeteriano e $X \subset \mathbb{P}^r_T$ un sottoschema chiuso. per ogni $t \in T$ sia P_t il polinomio di Hilbert della fibra X_t di X su t, visto come un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^r_{k(t)}$. Allora $X \to T$ è piatto se e solo se P_t non dipende da t.*

Commento 5.29. In particolare, in una famiglia piatta di varietà proiettivi come nel teorema, la dimensione delle fibre, il genere aritmetico e il grado sono costanti.

Commento 5.30. D'altra parte essere ridotto o irreducibile non è preservato: Sia $xy - tz^2$ una famiglia di schemi proiettivi in $\mathbb{P}^2_Y$ con $Y = \operatorname{Spec}(k[t])$. Allora per $t \neq 0$ abbiamo che la fibra X_t è irreducibile. Ma X_0 è dato da $xy = 0$ che è reducibile. Usando Proposizione 5.27, si vede che la famiglia è piatta su Y. Analogamente, per la famiglia $x(x-t)$ in $\mathbb{P}^1_Y$, che è piatta ed in cui la fibra generale è ridotto mentre la fibra su 0 non è ridotto.

Anche la funzione di Hilbert non è costante, come si può vedere per esempio nella famiglia $V((y,x) \cap (y-1,x) \cap (y+1,x+t))$ in $\mathbb{P}^2_Y$ dove i tre punti sono colineari per $t = 0$ e non lo sono per $t \neq 0$.

Fissando un polinomio di Hilbert P possiamo guardare all'insieme

$$H_{P,r} = \{X \subset \mathbb{P}^r_k \mid X \text{ chiuso con } P_X = P\}.$$

È un teorema importante, che $H_{P,r}$ stesso è uno schema, chiamato lo schema di Hilbert. È caratterizzato dalla seguente proprietà: dare una famiglia piatta $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r_T$ su uno schema T su k

tale che le fibre hanno polinomio di Hilbert P è la stessa cosa come dare un morfismo $T \to H_{P,r}$ (si dice che $H_{P,r}$ rappresenta il funtore che associa a uno schema T le famiglie piatte su T di sottovarietà proiettive di $\mathbb{P}^r_k$ con polinomio di Hilbert fissato). Questo è un esempio di un 'spazio di moduli'.

Tramite il criterio valutativo, la sequente proposizione dice che $H_{P,r}$ è proprio:

Proposizione 5.31 (Esistenza di limiti piatti)**.** *Sia Y uno schema regolare di dimensione 1, $p \in Y$ un punto chiuso, e $\mathcal{X}^\circ \subset \mathbb{P}^r_{Y \setminus p}$ un sottoinsieme chiuso, piatto su $Y \setminus p$. Allora esiste un unico sottoinsieme chiuso $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^r_Y$ tale che X è piatto su Y e $\mathcal{X}^\circ = \mathcal{X}|_{\mathbb{P}^r_{Y\setminus p}}$.*

Proof. Si può prendere come $\mathcal{X}$ la chiusura di $\mathcal{X}^\circ$ in $\mathbb{P}^r_Y$. Segue da Proposizione 5.27 che è piatto. $\square$

Esempio 5.32. Sia $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^3_k$ e consideriamo la proiezione da P, $\varphi_P \colon \mathbb{P}^3_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2_k, [x : y : z : w] \mapsto [x : y : z]$. Adesso sia C una curva in $\mathbb{P}^3_k$ che non contiene P e per ogni $t \in k^*$ sia σ_t l'automorfismo di $\mathbb{P}^3_k$ dato da $[x : y : z : w] \mapsto [x : y : z : tw]$ e $C_t = \sigma_t(C)$. Allora si vede (per esempio usando Proposizione 5.27) che i C_t formano una famiglia piatta su $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$. Quindi Proposizione 5.31 ci dice che esiste un unico limite C_0. Come insieme è chiaro che C_0 deve essere uguale a $\varphi(C)$.

Per calcolare il limite scegliamo un esempio concreto per C che è dato in coordinati affini dalla parametrizazzione $\operatorname{Spec}(k[s]) \to \mathbb{A}^3_k, x = s^2 - 1, y = s^3 - s, z = s$ (una twisted cubic) e consideriamo la proiezione su $\mathbb{A}^2_k$ con coordinati x e y. L'immagine della proiezione è la curva C_0' in $\mathbb{A}^2_k$ con equazione $y^2 = x^2(x - 1)$ (una cubica nodale). Ma questo non può essere il limite piatto (come schema), perchè il polinomio di Hilbert di C è

$$P_C(m) = \deg(C)m + 1 - p_a(C) = 3m + 1$$

mentre il polinomio di Hilbert di C_0' è

$$P_{C_0'}(m) = \deg(C_0')m - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 = 3m.$$

Quindi calcoliamo il limite piatto: per $t \neq 0$, la curva C_t è dato da: $x = s^2 - 1, y = s^3 - s, z = ts$. Vogliamo trovare l'ideale I tale che $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Spec}(k[x, y, z, t]/I)$ dove $\mathcal{C}$ è la estensione della famiglia C_t come in Proposizione 5.31. Eliminiamo prima s e otteniamo

$$t^2(x + 1) - z^2 = 0 \text{ e } yt^3 + zt^2 - z^3 = 0$$

Per avere una famiglia piatta, dobbiamo avere che t non è un divisore di 0 in $k[x, y, z, t])/I$ (cf. la dimostrazione di Proposizione 5.27). Sostituendo $t^2(x + 1) = z^2$ in $yt^3 + zt^2 - z^3 = 0$ dà $t^2(yt + z - (x + 1)z) = t^2(yt - xz)$ e quindi aggiungiamo $yt - xz$ come generatore di I e togliamo $yt^3 + zt^2 - z^3$. Ma allora abbiamo ancora che

$$x(t^2(x + 1) - z^2) = xt^2(x + 1) - ytz = t(tx(x + 1) - yz)$$

e aggiungiamo $tx(x + 1) - yz$ a I. Rimane che

$$x(tx(x + 1) - yz) = tx^2(x + 1) - y^2t = t(x^2(x + 1) - y^2)$$

e aggiungiamo $x^2(x + 1) - y^2$ a I. Mettiamo

$$I = (t^2(x + 1) - z^2, yt - xz, tx(x + 1) - yz, x^2(x + 1) - y^2)$$

e si verifica che t non è un divisore di 0 in $k[x, y, z, t]/I$. Mettendo $t = 0$ otteniamo

$$I_0 = (z^2, xz, yz, x^2(x + 1) - y^2)$$

l'ideale di C_0 in $k[x, y, z]$. Quindi C_0 ha supporto $x^2(x + 1) - y^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2$ (dato da $z = 0$) che coincide con $\varphi(C)$ come atteso. Ad ogni punto p con $x \neq 0$ o $y \neq 0$ abbiamo che z è nel immagine di I_0 nella localizzazione $\mathcal{O}_{X,x}$ e segue che C_0 è ridotto a p; ma per $p = (0, 0, 0)$ abbiamo che z non è nella localizzazione del ideale, e quindi dà un elemento non-zero con $z^2 = 0$ e p non è ridotto. Quindi, il limite piatto della famiglia è la cubica nodale con un 'punto immerso' vicino la noda (in particolare, non è un sottoschema di $\mathbb{A}^2_k$). E finiamo dove abbiamo iniziato motivando l'introduzione degli schemi: anche parlando solo di varietà classiche servono schemi per avere una teoria che si comporta bene in famiglie.

—

Lezione 4.12.