Formula di Taylor in n variabili

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x \in A$, $r > 0$ tale che $\|h\| \leq r \to x + h \in A$. Se $f \in \mathcal{C}^N(A)$, $N \geq 1$, allora

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{(\partial^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha + N \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \sum_{|\alpha|=N} \frac{(\partial^\alpha f)(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \, d\theta.$$

Dimostrazione. Definiamo $g(\theta) = f(x+\theta h)$, $\theta \in I = (-\sigma, 1+\sigma)$, con $\sigma > 0$ tale che $\|k\| < r(1+\sigma) \to x + k \in A$. Per l'ipotesi su f, si ha $g \in \mathcal{C}^N(I)$, quindi, utilizzando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed integrando ripetutamente per parti, troviamo

$$\begin{aligned}
g(1) &= g(0) + \int_0^1 g^{(1)}(\theta)\, d\theta = g(0) - \int_0^1 (-1)\, g^{(1)}(\theta)\; d\theta \\
&= g(0) - \left[(1-\theta)\, g^{(1)}(\theta)\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 (1-\theta)\, g^{(2)}(\theta)\, d\theta \\
&= g(0) + g^{(1)}(0) + \int_0^1 (1-\theta)\, g^{(2)}(\theta)\, d\theta \\
&= g(0) + g^{(1)}(0) - \left[\frac{(1-\theta)^2}{2}\, g^{(2)}(\theta)\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2}\, g^{(3)}(\theta)\, d\theta \\
&= g(0) + g^{(1)}(0) + \frac{g^{(2)}(0)}{2!} + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2!}\, g^{(3)}(\theta)\, d\theta \\
&= g(0) + g^{(1)}(0) + \frac{g^{(2)}(0)}{2!} - \left[\frac{(1-\theta)^3}{3!}\, g^{(3)}(\theta)\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^3}{3!}\, g^{(4)}(\theta)\, d\theta \\
&= g(0) + g^{(1)}(0) + \frac{g^{(2)}(0)}{2!} + \frac{g^{(3)}(0)}{3!} + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^3}{3!}\, g^{(4)}(\theta)\, d\theta \\
&\dots \\
&= \sum_{k<N} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + N \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{N!}\, g^{(N)}(\theta)\, d\theta,
\end{aligned}$$

dove $g^{(k)}$ è la k-esima derivata di g. Ne segue

$$f(x+h) = \sum_{k<N} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + N \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{N!}\, g^{(N)}(\theta)\, d\theta. \tag{3.1}$$

Dal teorema di derivazione delle funzioni composte si ha, per $k = 1, \dots, N$,

$$g^{(k)}(\theta) = \left[\left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k f\right](x+\theta h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\, (\partial^\alpha f)(x+\theta h)\, h^\alpha,\ \theta \in I. \tag{3.2}$$

Sostituendo la (3.2) nella (3.1) si ottiene l'enunciato. ∎

Osservazione. L'espressione della k-esima potenza dell'operatore lineare $L = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ su $\mathcal{C}^N(A)$, utilizzata nella (3.2), segue dalla formula

$$(y_1 + \cdots + y_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\, y^\alpha, \qquad y \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N},$$

che si può dimostrare per induzione su n. Infatti,

- per $n = 1$ è banalmente vera;
- per $n = 2$ è la formula del Binomio di Newton per $k \in \mathbb{N}$, riscritta utilizzando multiindici $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$:

$$(y_1 + y_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} y_1^j\, y_2^{k-j} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\, y^\alpha;$$

- se è vera per $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, utilizzando di nuovo la formula del Binomio di Newton e multiindici $\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, scelto $y \in \mathbb{R}^n$ e posto $z = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si ha

$$\begin{aligned}
(y_1 + \cdots + y_{n-1} + y_n)^k &= [(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + y_n]^k \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} (y_1 + \cdots + y_{n-1})^{k-j}\, y_n^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=k-j} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\, \frac{(k-j)!}{\beta!}\, z^\beta\, y_n^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=k-j} \frac{k!}{\beta!\,j!}\, z^\beta\, y_n^j = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} y^\alpha,
\end{aligned}$$

  che è la formula per $y \in \mathbb{R}^n$ (dove si è posto $\alpha = (\beta, j) \in \mathbb{N}_0^n \to |\alpha| = k$).