6 Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Di cosa si tratta? Le distribuzioni sono funzionali continui su opportuni spazi di funzioni. Generalizzano il concetto di funzione, nel senso che qualsiasi funzione localmente integrabile (in particolare, continua) può essere identificata con una distribuzione e che molte operazioni standard sulle funzioni si estendono alle distribuzioni. Per questo motivo, le distribuzioni sono anche chiamate *funzioni generalizzate*. Per alcuni aspetti, le distribuzioni si comportano addirittura meglio delle funzioni. Per esempio, qualsiasi distribuzione può essere (parzialmente) derivata tutte le volte che si desidera. Questo rende le distribuzioni un ambiente molto adatto allo studio delle *equazioni alle derivate parziali*.

Nel seguito Ω denota un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$.

Scriveremo $K \subset\subset \Omega$ se K è compatto e $K \subset \Omega$.

Ricordiamo che un multi-indice è un vettore $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Per una funzione $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ di classe $\mathscr{C}^N(\Omega)$ si scrive[7]

$$\partial^\alpha f = \partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (\text{“}\alpha\text{-derivata parziale”}),$$

con $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leqslant N$. Si scrive anche, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indice, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, dove è sottinteso l'abuso di notazione[8] $x^0 \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Le funzioni test

Il supporto di una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e l'insieme

$$\boxed{\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.}$$

6.1 Esempio. $f(x) = \sin x \Rightarrow \operatorname{supp} f = \overline{\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

6.2 Definizione (Spazio delle funzioni test)**.** *Definiamo*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \left\{\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} \phi \subset\subset \Omega\right\}.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (con la solita addizione di funzioni e la solita moltiplicazione di funzioni per numeri complessi). Infatti,

$$\operatorname{supp}(\phi + \psi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \cup \operatorname{supp} \psi, \qquad \operatorname{supp}(\lambda\phi) \subseteq \operatorname{supp} \phi \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

[7] L'ordine di applicazione delle derivate parziali in $\partial^\alpha f$ non è rilevante, grazie al Teorema di Schwarz, per le ipotesi $f \in \mathscr{C}^N(\Omega)$ e $|\alpha| \leqslant N$.

[8] Cioè, il fattore x_j non è presente nel monomio x^α se $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Si noti anche che $\mathscr{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{D}(\tilde{\Omega}) \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ per $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$.

6.3 Esempio (Mollificatore). $\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geqslant 1. \end{cases}$

Con $c := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx$ *sia* $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon^{-n}}{c}\rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow 0 \leqslant \rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\operatorname{supp}\rho = \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

6.4 Lemma. *Sia* $K \subset\subset \Omega$. *Esiste* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *con* $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ *e* $\phi \equiv 1$ *in un intorno di* K.

DIMOSTRAZIONE. Sia $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\}$, $\chi_\varepsilon = \chi_{K_\varepsilon}$ la funzione caratteristica e

$$\phi_\varepsilon(x) := (\chi_{2\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{|y| \leqslant \varepsilon} \chi_{2\varepsilon}(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy.$$

Dai risultati della prima parte (Capitolo 2) $\Rightarrow \phi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$|y| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \chi_{2\varepsilon}(x-y)\rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} \rho_\varepsilon(y) & : x \in K_\varepsilon \\ 0 & : x \notin K_{3\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \phi_\varepsilon \equiv 1$ su K_ε e supp $\phi_\varepsilon \subseteq K_{3\varepsilon}$.

Basta scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $K_{3\varepsilon} \subseteq \Omega$ e prendere $\phi := \phi_\varepsilon$. ∎

6.5 Definizione. *In* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *definiamo le norme* $\|\cdot\|_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ *da*

$$\|\phi\|_j := \max_{x \in \mathbb{R},\, |\alpha| \leqslant j} |\partial_x^\alpha \phi(x)|.$$

6.6 Definizione. *Una successione* $(\phi_k)_k \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ *si dice convergente a* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *se*

i) $\exists\, K \subset\subset \Omega \quad \forall\, k: \quad \operatorname{supp}\phi_k \subseteq K$,

ii) $\|\phi_k - \phi\|_j \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ *per ogni* $j = 0, 1, 2, \ldots$

Scriviamo $\phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \phi$ *oppure* $\lim_{k\to+\infty} \phi_k = \phi$; *si nota che allora anche* $\operatorname{supp}\phi \subseteq K$.

Condizione *ii*) significa che $\partial^\alpha\phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha\phi$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per tutte α.

6.7 Lemma. *Sia* $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ *e* $\phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \phi$. *Allora* $\partial^\beta\phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\beta\phi$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $L := |\beta|$ e (ϕ_k) come nella Definizione 6.6. Allora

i) $\phi_k = 0$ on $\Omega\backslash K \Rightarrow \partial^\beta\phi_k = 0$ on $\Omega\backslash K \Rightarrow \operatorname{supp}\partial^\beta\phi_k \subseteq K$ per ogni k,

ii) $\|\partial^\beta \phi_k - \partial^\beta \phi\|_j \leqslant \|\phi_k - \phi\|_{j+L} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ per ogni j.

Quindi $\partial^\beta \phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\beta \phi$. ∎

6.2 Distribuzioni

6.8 Definizione. *Una mappa $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ si dice distribuzione in/su Ω se*

i) *T è lineare.*

ii) *Per ogni successione $(\phi_k)_k$ convergente in $\mathscr{D}(\Omega)$ vale $\lim_{k\to+\infty} T(\phi_k) = T\Big(\lim_{k\to+\infty} \phi_k\Big)$.*

Definiamo

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \{T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid T \text{ distribuzioni}\}.$$

Si nota che $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno sottospazio dello spazio vettoriale delle mappe lineari $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$.

6.9 Teorema (Disuguaglianza di controllo)**.** *Sia $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$

b) $\forall\, K \subset\subset \Omega \quad \exists\, C = C(K) \geqslant 0 \quad \exists\, j = j(K) \in \mathbb{N} \quad \forall_{\substack{\phi\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi\subseteq K}} : \qquad |T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_j$

Dimostrazione. **b)** $\Rightarrow$ **a)** : $\phi_k \to \phi$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ come in Definizione 6.6.

$\Rightarrow |T(\phi_k) - T(\phi)| = |T(\phi_k - \phi)| \leqslant C(K)\|\phi_k - \phi\|_{j(K)} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

a) $\Rightarrow$ **b)** : Dato T supponiamo che b) non sia vero per un $K \subset\subset \Omega$.

$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists_{\substack{\phi_k\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi_k\subseteq K}} : \quad |T(\phi_k)| > k\|\phi_k\|_k$.

$\psi_k := \phi_k/T(\phi_k) \Rightarrow T(\psi_k) = 1$ e $\|\psi_k\|_k = \frac{\|\phi_k\|_k}{|T(\phi_k)|} < \frac{1}{k}$.

$\Rightarrow \|\psi_k\|_j \overset{k\geqslant j}{\leqslant} \|\psi_k\|_k < \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ per ogni j.

$\Rightarrow \psi_k \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, ma $T(\psi_k) = 1 \not\to 0$. ↯ ∎

6.10 Definizione. *$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si chiama distribuzione di ordine finito se in b) del Teorema 6.9 si può scegliere un j simultaneamente per tutti i $K \subset\subset \Omega$. Il j più piccolo possibile è detto ordine di T.*

6.11 Esempio (Distribuzioni regolari)**.** *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, cioè*

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty \qquad \forall\, K \subset\subset \Omega;$$

(f si dice localmente integrabile in/su Ω). Definiamo

$$\boxed{T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.}$$

T_f è una distribuzione di ordine 0 :

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| &\leqslant \int_\Omega |f(x)||\phi(x)|\,dx = \int_K |f(x)||\phi(x)|\,dx \\ &\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \cdot \int_K |f(x)|\,dx = C_K\|\phi\|_0 \qquad \forall \substack{\phi\in\mathscr{D}(\Omega),\\ \operatorname{supp}\phi\subseteq K}. \end{aligned}$$

T_f è detta distribuzione regolare, f è la densità di T_f.

6.12 Teorema. *Sia f localmente integrabile in Ω. Allora*

$$T_f(\phi) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \iff f = 0 \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

In particolare, la densità di una distribuzione regolare è determinata unicamente (quasi ovunque).

Dimostrazione. L'implicazione"$\Leftarrow$" è immediata. Dimostriamo l'implicazione "$\Rightarrow$".
Passo I. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Dai risultati della prima parte (Capitolo 2): $f * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.
$(f * \rho_\varepsilon)(x) = \displaystyle\int f(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = T_f(\rho_\varepsilon(x-\cdot)) = 0 \quad \forall\, x$
$\Rightarrow f = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque.
Passo II. Sia $K \subset\subset \Omega$ arbitrario e $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $\psi \equiv 1$ su K.
$\psi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (identificando ψf con la sua estensione a 0 da Ω a tutto $\mathbb{R}^n$)
$T_{\psi f}(\phi) = T_f(\psi\phi) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$
Passo I $\Rightarrow f = 0$ quasi ovunque in K.
$K_n := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n},\ |x| \leqslant n\}$
$\Rightarrow K_n \subset\subset \Omega$ e $\Omega = \cup_n K_n$
$f = 0$ quasi ovunque in K_n per ogni $n \Rightarrow f = 0$ quasi ovunque in Ω
(si utilizzi che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla è un insieme di misura nulla). ∎

6.13 Esempio (Distribuzione δ, distribuzione di Dirac)**.** *Definiamo*

$$\boxed{\delta : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}\colon \phi \mapsto \delta(\phi) = \phi(0).}$$

Allora $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *di ordine* 0 :

$$|\delta(\phi)| = |\phi(0)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)| = \|\phi\|_0 \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, la distribuzione δ *centrata in* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *è*

$$\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0).$$

δ *non è una distribuzione regolare*:

Supponiamo $\delta = T_f$. *Sia* $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *come nell'Esempio* 6.3.

$\Rightarrow \phi_k(x) = \rho(kx) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$1 = \phi_k(0) = \delta(\phi_k) = T_f(\phi_k) = \int_{B_1(0)} f(x)\phi_k(x)\, dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$$

grazie al Teorema della convergenza dominata. $\lightning$

6.14 Esempio (Valor principale di $1/x$). $x \mapsto 1/x$ *non appartiene a* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, *quindi non definisce una distribuzione regolare su* $\mathbb{R}$. *Comunque*

$$\boxed{T(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),}$$

definisce $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, *detta valor principale di* $1/x$. *Si scrive anche* $\mathrm{pv}\text{-}\frac{1}{x}$ *o* $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$. *Infatti:*

Taylor $\Rightarrow \phi(x) = \phi(0) + x r_\phi(x)$ *con* $r_\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\begin{aligned} T(\phi) &= \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi(x)\, dx + \int_{-1}^{1} r_\phi(x)\, dx =: T_u(\phi) + S(\phi) \end{aligned}$$

perché

$$\int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(0)}{x}\, dx = \phi(0)\Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx\Big) = 0,$$

e dove

$$u(x) = \begin{cases} 0 & : |x| \leqslant 1 \\ 1/x & : |x| > 1 \end{cases} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Inoltre,

$$|r_\phi(x)| = \Big| \int_0^1 \phi'(tx)\, dt \Big| \leqslant \max_{s\in\mathbb{R}} |\phi'(s)| \leqslant \|\phi\|_1 \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Quindi $T = T_u + S$ *è una distribuzione di ordine* 1.

6.15 Definizione. *Una successione $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ si dice convergente a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se*

$$T_k(\phi) \xrightarrow{k\to+\infty} T(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

6.16 Esempio. *Con il mollificatore di Esempio 6.3 vale* $T_{\rho_{1/k}} \xrightarrow{k\to+\infty} \delta$:

$$\begin{aligned}|T_{\rho_{1/k}}(\phi) - \delta(\phi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_{1/k}(x)\phi(x)\,dx - \phi(0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_{1/k}(x)\big(\phi(x) - \phi(0)\big)\,dx\right| \\ &\leqslant \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |x|\leqslant 1/k}} |\phi(x) - \phi(0)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

6.3 Prodotto di distribuzioni e funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$

Siano $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Allora T_f e T_{af} sono distribuzioni regulari e

$$T_{af}(\phi) = \int_\Omega a(x)f(x)\phi(x)\,dx = T_f(a\phi).$$

Si osserva che nell'espressione a destra possiamo sostituire T_f con una distribuzione generale T. Ciò suggerisce la definizione successiva.

6.17 Teorema (e Definizione). *Siano $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Allora*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definisce una distribuzione $aT \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

6.4 Derivazione di distribuzioni

Sia $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Allora $T_f, T_{f'}$ sono distribuzioni regolari. È naturale definire la prima derivata di T_f come $T_{f'}$. Per un qualsiasi $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vale

$$T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = \underbrace{f(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\,dx = -T_f(\phi').$$

Mentre $T_{f'}(\phi)$ ha senso solo se f è differenziabile, l'espressione $-T_f(\phi')$ ha senso per una qualsiasi funzione f e, di più, possiamo sostituire T_f con una qualsiasi distribuzione T. Questo ci porta a definire $T' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $T'(\phi) = -T(\phi')$.

6.18 Teorema (e definizione). *Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$T^{(k)}(\phi) := (-1)^k T(\phi^{(k)}) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

definisce una distribuzione $T^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *(la k-esima derivata di T).*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente $T^{(k)} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lineare.

Sia $\phi_\ell \xrightarrow{\ell\to+\infty} \phi$.

Lemma 6.7 $\Rightarrow \phi_\ell^{(k)} \xrightarrow{\ell\to+\infty} \phi^{(k)}$.

$\Rightarrow (-1)^k T(\phi_\ell^{(k)}) \xrightarrow{\ell\to+\infty} (-1)^k T(\phi^{(k)})$. ■

Se $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$, allora $(T_f)^{(k)} = T_{f^{(k)}}$, cioè si ottiene la derivata usuale. Se f e una funzione non necessariamente derivabile, $(T_f)^{(k)}$ si dice k-esima derivata debole oppure k-esima derivata nel senso delle distribuzioni di f. In generale, la derivata debole non è una di-stribuzione regolare.

6.19 Teorema. *Sia f una funzione di forma*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & : x > x_0 \\ h(x) & : x < x_0 \end{cases}, \qquad g \in \mathscr{C}^1([x_0, +\infty)), \quad h \in \mathscr{C}^1((-\infty, x_0])$$

(come f è definita in x_0 non importa). Allora

$$(T_f)' = T_{f'} + \big(g(x_0) - h(x_0)\big)\delta_{x_0}, \qquad f'(x) := \begin{cases} g'(x) & : x > x_0 \\ h'(x) & : x < x_0 \end{cases}.$$

Si nota che $g(x_0) - h(x_0) = f(x_0+) - f(x_0-)$ è l'altezza del salto di f in x_0.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(T_f)'(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int_{-\infty}^{x_0} h(x)\phi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\phi'(x)\,dx \\ &= -h(x)\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} h'(x)\phi(x)\,dx - g(x)\phi(x)\Big|_{x=x_0}^{x=+\infty} + \int_{x_0}^{+\infty} g'(x)\phi(x)\,dx \\ &= (g(x_0) - h(x_0))\phi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = (g(x_0) - h(x_0))\delta_{x_0}(\phi) + T_{f'}(\phi).\end{aligned}$$

Questo finisce la dimostrazione. ■

Il teorema precedente si generalizza a funzioni con più di un salto:

6.20 Esempio. *Sia* $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} 1 - x^2 & : -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & : |x| > 1 \end{cases}$. *Derivare T_f:*

Prima derivata: $(T_f)' = T_{f'}$, $\qquad f'(x) = \begin{cases} -2x & : -1 < x < 1 \\ 2x & : |x| > 1 \end{cases}$

Seconda derivata: $(T_f)'' = (T_{f'})' = T_{f''} + 4\delta_1 + 4\delta_{-1}$, $\qquad f''(x) = \begin{cases} -2 & : -1 < x < 1 \\ 2 & : |x| > 1 \end{cases}$

Terza derivata: $(T_f)''' = (T_{f''})' + 4\delta_1' - 4\delta_{-1}' = 4\delta_1 - 4\delta_{-1} + 4\delta_1' + 4\delta_{-1}'$

Un operatore a coefficienti costanti di secondo ordine

$$\boxed{P = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})}$$

si può pensar come operatore lineare nell'ambito delle distribuzioni:

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \quad PT = aT'' + bT' + cT.}$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $aT'' + bT' + cT = 0$ sono le ben note soluzioni classiche $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, cioè le distribuzioni regolari T_y con $ay''+by'+cy = 0$ (non ci sono soluzioni aggiuntive in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ – per le equazioni a derivate parziali invece alle soluzioni classiche si aggiungono nuovo soluzioni distribuzionali). Dimostriamo questo fatto per equazioni di primo ordine:

Teorema. Siano $I = (\alpha, \beta)$, $f \in \mathscr{C}(I)$ e $T \in \mathscr{D}'(I)$ con $T' + bT = T_f$. Allora $\exists\, y \in \mathscr{C}^1(I)$ tale che $y'(x) + by(x) = f(x)$ in I e $T = T_y$.

Dimostrazione. **Passo I.** Sia $T' = 0$. Sia $S = T_1 \in \mathscr{D}'(I)$, cioè $S(\phi) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx$.

$\psi \in \mathscr{D}(I)$ e $S(\psi) = 0$ implica $T(\psi) = 0$:

$$\Psi(x) := \int_\alpha^x \psi(t)\,dt \in \mathscr{D}(I) \text{ e quindi } T(\psi) = T(\Psi') = -T'(\Psi) = 0.$$

Scegliamo un $\phi_0 \in \mathscr{D}(I)$ con $S(\phi_0) = 1$.

$S\big(\phi - S(\phi)\phi_0\big) = S(\phi) - S(\phi)S(\phi_0) = 0 \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow 0 = T(\phi - S(\phi)\phi_0) = T(\phi) - S(\phi)T(\phi_0) \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow T(\phi) = \displaystyle\int_\alpha^\beta T(\phi_0)\phi(x)\,dx \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(I)$

$\Rightarrow T = T_c$ con $c = T(\phi_0)$.

Passo II. Esercizio 6.2 $\Rightarrow (e^{bx}T)' = be^{bx}T + e^{bx}T' = e^{bx}(T' + bT) = e^{bx}T_f = T_{e^{bx}f}$.

Sia $g \in \mathscr{C}^1(I)$ con $g' = e^{bx}f$.

$\Rightarrow (e^{bx}T - T_g)' = T_{e^{bx}f} - T_{g'} = 0$

Passo I $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{C} : \quad e^{bx}T - T_g = T_c \Rightarrow T = e^{-bx}T_{(g+c)} = T_{e^{-bx}(g+c)}$

Basta scegliere $y(x) = e^{-bx}(g(x) + c)$. ■

Si dice equazione impulsiva un'equazione non-omogenea del tipo

$$\boxed{aT'' + bT' + cT = S, \quad S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),}$$

con S una distribuzione non regolare. Tutte le soluzioni sono della forma $T = T_y + \widehat{T}$, dove y è la generica soluzione dell'omogenea, e $\widehat{T}$ è una soluzione particolare di $PT = S$.

6.21 Definizione. *Ogni soluzione dell'equazione $PT = \delta$ è detta soluzione fondamentale per l'operatore P.*

6.22 Teorema. *Sia P come sopra con $a \neq 0$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e y la soluzione classica dell'equazione $Py = 0$ con $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1/a$. Se*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$$

allora $PT_f = \delta_{x_0}$. In caxo $x_0 = 0$ si ottiene una soluzione fondamentale per P.

Dimostrazione. Si applica il Teorema 6.19 due volte:

$Tf' = T_{f'} + (0-0)\delta = T_{f'}$, dove $f'(x) = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y'(x) & : x > x_0 \end{cases}$,

$(Tf)'' = (T_{f'})' = T_{f''} + (y'(x_0) - 0)\delta = T_{f''} + \frac{1}{a}\delta_{x_0}$, dove $f''(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ y''(x) & : x > 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow a(T_f)'' + b(T_f)' + cT_f = T_{af''+bf'+cf} + a\frac{1}{a}\delta_{x_0}$.

$(af'' + bf' + cf)(x) = \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ ay'' + by'(x) + cy(x) & : x > x_0 \end{cases} = 0 \Rightarrow PT_f = \delta_{x_0}$. ∎

6.23 Esempio. *Cerchiamo una soluzione fondamentale di $Py = y'' - y' - 2y$. Allora $a = b = 1$, $c = -2$ e $x_0 = 0$. Polinomio caratteristico:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Quindi

$$y'' - y' - 2y = 0 \iff y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A e B :

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 &\iff A + B = 0, \\ y'(0) = 1 &\iff -A + 2B = 1 \end{aligned}\right\} \iff A = -1/3,\ B = 1/3.$$

Risulta la soluzione fondamentale T_f con $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ -\frac{1}{3}(e^{-x} - e^{2x}) & : x > 0 \end{cases}$.

6.24 Esempio. *Cerchiamo una soluzione di* $Py = y'' - 4y' + 4y = \delta_2$*. Allora* $a = 1$*,* $b = -4$*,* $c = 4$ *e* $x_0 = 2$*. Polinomio caratteristico:*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Quindi

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \iff y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Determinare A *e* B *:*

$$\left.\begin{array}{l} y(2) = 0 \iff Ae^4 + 2Be^4 = 0, \\ y'(2) = 1 \iff 2Ae^4 + 5Be^4 = 1 \end{array}\right\} \iff A = -2e^{-4},\ B = e^{-4}.$$

Risulta la soluzione $y = T_f$ *con* $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 2 \\ (x-2)e^{2(x-2)} & : x > 2. \end{cases}$

6.5 Distribuzioni ed equazioni a derivate parziali

Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e α multi-indice. Analogamente alla Definizione 6.18,

$$\boxed{\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \qquad \forall\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).}$$

definisce la distribuzione $\partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Quindi un operatore differenziale $P = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \partial^\alpha$, con $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leqslant m$, definisce un'applicazione lineare

$$\boxed{P : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \colon T \mapsto PT = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (\partial^\alpha T).}$$

Consideriamo adesso degli operatori a coefficienti costanti, cioè tutti gli a_α sono numeri complessi, $|\alpha| \leqslant m$.

6.25 Esempio. *Con* $m = 2$ *e* $a_\alpha = \begin{cases} 1 & : \alpha \in \{2e_1, \ldots, 2e_n\} \\ 0 & : \textit{altrimenti} \end{cases}$ *risulta*

$$P = \sum_{k=1}^{n} \partial^{2e_k} = \sum_{k=1}^{n} \partial^2_{x_k} = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n} =: \Delta,$$

il cosidetto operatore di Laplace oppure Laplaciano.

6.26 Definizione. *Le soluzioni dell'equazione* $PT = \delta$ *sono dette soluzioni fondamentali per l'operatore* P*.*

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)\,dy = T_f(\phi(x-\cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Questa relazione ci porta alla seguente definizione della convoluzione:

6.27 Teorema (e Definizione). *Siano $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*

$$(T * \phi)(x) := T(\phi(x-\cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

definisce una funzione $T * \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per ogni α vale $\partial^\alpha(T*\phi) = (\partial^\alpha T)*\phi = T*(\partial^\alpha\phi)$.

Dimostrazione. Sia $u(x) = (T*\phi)(x)$.

Continuità: Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato.

$u(x_0+h) - u(x_0) = T\big(\phi(x_0+h-\cdot) - \phi(x_0-\cdot)\big)$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$.

Taylor $\Rightarrow r_h(y) := \phi(x_0+h-y) - \phi(x_0-y) = h \cdot \int_0^1 \nabla\phi(x_0+th-y)\,dt$

Ovviamente $r_h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni h. Verificheremo:

i) $\exists\, K \subset\subset \mathbb{R}^n \quad \forall^{h\in\mathbb{R}^n}_{|h|\leqslant 1}: \quad \operatorname{supp} r_h \subseteq K$,

ii) $\partial^\alpha r_h \xrightarrow{h\to 0} 0$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Per i) si nota che $\exists\, N > 0$ tale che $\operatorname{supp}\phi \subset B_N(0)$ e

$$\begin{aligned} r_h(y) \neq 0 &\Rightarrow \exists\, 0 \leqslant t \leqslant 1: \quad \nabla\phi(x_0+th-y) \neq 0 \\ &\Rightarrow x_0 + th - y \in \operatorname{supp}\phi \\ &\Rightarrow \exists\, z \in \operatorname{supp}\phi: \quad y = x_0 + th - z \\ &\Rightarrow |y - x_0| \leqslant |z| + |th| < N+1 \\ &\Rightarrow y \in B_{N+1}(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{supp} r_h \subseteq K := \overline{B_{N+1}(x_0)}$.

Per ii) si nota: $|\partial_y^\alpha r_h(y)| \leqslant |h| \max_{z\in\mathbb{R}^n} |\nabla\partial^\alpha\phi(z)| \leqslant \text{const}\cdot|h|$.

i), ii) $\Rightarrow r_h \xrightarrow{h\to 0} 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow u(x_0+h) - u(x_0) = T(r_h) \xrightarrow{h\to 0} 0$

Derivabilità parziale: Si procede in modo simile, scrivendo

$$\frac{u(x_0+\tau e_j) - u(x_0)}{\tau} - (T * \partial_j\phi)(x_0) = T(r_\tau)$$

con

$$r_\tau(y) := \frac{\phi(x_0+\tau e_j - y) - \phi(x_0-y)}{\tau} - (\partial_j\phi)(x_0-y) = \tau\int_0^1 (1-t)(\partial_j^2\phi)(x_0+t\tau e_j-y)\,dt.$$

Risulta $r_\tau \xrightarrow{\tau\to 0} 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $T(r_\tau) \xrightarrow{\tau\to 0} 0$, cioè

$$\begin{aligned}\partial_j u(x_0) &= (T * \partial_j\phi)(x_0) = T((\partial_j\phi)(x_0 - \cdot)) \\ &= -T\big(\partial_j[\phi(x_0 - \cdot)]\big) = (\partial_j T)(\phi(x_0 - \cdot)) = ((\partial_j T) * \phi)(x_0).\end{aligned}$$

Come sopra: $\partial_j u$ è continua.

L'iterazione di questo procedimento dimostra l'enunciato. ∎

6.28 Esempio. *Vale $\delta * \phi = \phi$ perché*

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\phi(x - \cdot)) = \phi(x - 0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se T è una soluzione fondamentale dell'operatore differenziale a coefficienti costanti P e $u := T * \phi$, si trova

$$Pu = (PT) * \phi = \delta * \phi = \phi$$

(la prima identità vale perché P ha coefficienti costanti). Quindi $T * \phi$ fornisce una soluzione dell'equazione a derivate parziali $Pu = \phi$.

6.29 Teorema (Malgrange-Ehrenpreis)**.** *Ogni operatore differenziale $P \neq 0$ a coefficienti costanti ha una soluzione fondamentale.*

6.30 Teorema. *Il Laplaciano Δ in $\mathbb{R}^2$ ha soluzione fondamentale T_f con $f(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$. Quindi una soluzione di $\Delta u = \phi$ è*

$$u(x) = (T_f * \phi)((x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\phi(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\phi(y)\ln|x-y|\,dy.$$

Dimostrazione. Ricordiamo la formula di Gauss-Green nel piano:

$$\int_U \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx = \int_{\partial U}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds, \tag{6.1}$$

dove $U \subset \mathbb{R}^2$ appropriato, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ campo vettoriale in due variabli di classe $\mathscr{C}^1$ in un intorno di U e $\mathbf{n} : \partial U \to \mathbb{R}^2$ il versore normale esterno ad U.

Formule di Green: Siano u, v funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ in un intorno di U.

(1) $\displaystyle\int_U \Delta u = \int_{\partial U} D_{\mathbf{n}}u\,ds$ (dove $D_{\mathbf{n}}u = \nabla u\cdot\mathbf{n}$ derivata in direzione $\mathbf{n}$),

(2) $\displaystyle\int_U (u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v) = \int_{\partial U} uD_{\mathbf{n}}v\,ds,$

(3) $\displaystyle\int_U (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial U}(uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)\,ds.$

Per la (1), applicare (6.1) a $\mathbf{F} = \nabla u$; per la (2), applicare (6.1) a $\mathbf{F} = u\nabla v$. Sia (2′) ottenuta dallo scambio di u e v nella (2). La differenza membro a membro (2) − (2′) prova la (3).

Sia $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Si ha quindi $\exists\, R > 0 : \quad \operatorname{supp}\phi \subseteq U := \{x \mid |x| \leqslant R\}$.

$U_\varepsilon := \{x \mid \varepsilon \leqslant |x| \leqslant R\} \Rightarrow \mathbf{n}(x) = \begin{cases} -x/\varepsilon & : |x| = \varepsilon \\ x/R & : |x| = R. \end{cases}$

$(\Delta T_f)(\phi) = T_f(\Delta\phi) = \displaystyle\int_U f(x)\Delta\phi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U_\varepsilon} f(x)\Delta\phi(x)\,dx$, dato che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Perché $2\pi\nabla f(x) = x/|x|^2$ e $\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ (Esercizio!), dalla (3) segue

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon} f(x)\Delta\phi(x)\,dx &= \int_{U_\varepsilon} [f(x)\Delta\phi(x) - \phi(x)\Delta f(x)]\,dx \\ &= \int_{\partial U_\varepsilon} [f(x)D_{\mathbf{n}}\phi(x) - \phi(x)D_{\mathbf{n}}f(x)]\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon} [\phi(x) - \ln\varepsilon\nabla\phi(x)\cdot x]\,ds.\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\phi(x)ds - \phi(0)\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\phi(x)-\phi(0)|\,ds \leqslant \max_{|x|=\varepsilon}|\phi(x)-\phi(0)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0, \\ \Big|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\ln\varepsilon\nabla\phi(x)\cdot x\,ds\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\ln\varepsilon||\nabla\phi(x)||x|\,ds \\ &= |\varepsilon\ln\varepsilon|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}|\nabla\phi(x)|\,ds \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0|\nabla\phi(0)| = 0.\end{aligned}$$

Ne segue $(\Delta T_f)(\phi) = \phi(0) = \delta(\phi)$, come affermato. ∎

6.6 Il supporto delle distribuzioni

Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $U \subseteq \Omega$ aperto. Si dice

$$\boxed{S = T \text{ in } U :\Longleftrightarrow\ S(\phi) = T(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(U).}$$

6.31 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\Omega_T := \bigcup_{\substack{U\subseteq\Omega \text{ aperto,} \\ T=0 \text{ in } U}} U$, cioè*

$$\boxed{\Omega_T = \{x \in \Omega \mid \exists\, U \subseteq \Omega \text{ intorno aperto di } x \text{ t.c. } T = 0 \text{ in } U\}.}$$

Allora $T = 0$ in Ω_T. Quindi Ω_T è il più grande sottoinsieme aperto di Ω dove $T = 0$.

Dimostrazione. Sia $\phi \in \mathscr{D}(\Omega_T)$ e $K := \operatorname{supp}\phi$.

K compatto $\Rightarrow \exists\, U_1, \ldots, U_N : \quad T = 0$ in $U_j,\ K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N$

Esistono $K_j \subset\subset U_j$ tale che $K \subset K_1 \cup \ldots \cup K_N$:

$z \in K \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, 1 \leqslant j \leqslant N : \quad \overline{B_\varepsilon(z)} \subseteq U_j$

K compatto $\Rightarrow$ Una famiglia finita di questi $B_\varepsilon(z_k)$ fornisce un ricoprimento di K.

$K_j :=$ unione finita di $\overline{B_\varepsilon(z_k)}$ del ricoprimento contenuti in U_j.

Lemma 6.4 $\Rightarrow \exists\, \psi_j \in \mathscr{D}(U_j) : \quad 0 \leqslant \psi_j \leqslant 1,\ \psi_j \equiv 1$ in un intorno di K_j.

$\phi_1 := \phi\psi_1,\ \phi_k := \phi\psi_k(1-\psi_1)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_{k-1})$ per $k = 2, \ldots, N$

$\Rightarrow \phi_k \in \mathscr{D}(U_k)$ e $\phi - \sum_{k=1}^{\ell} \phi_k = \phi(1-\psi_1)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_\ell)$ (induzione!)

$\ell = N \Rightarrow \phi - \sum_{k=1}^{N} \phi_k = 0 \Rightarrow T(\phi) = \sum_{k=1}^{N} T(\phi_k) = 0.$ ∎

6.32 Definizione. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Il supporto di T è l'insieme* $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \Omega_T$.

6.33 Esempio. $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$:

$\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow \delta(\phi) = 0 \Rightarrow \delta = 0$ *su* $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \Rightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \subseteq \Omega_\delta$

δ *non è zero su tutto* $\mathbb{R}^n \Rightarrow \Omega_\delta = \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \Rightarrow \operatorname{supp}\delta = \mathbb{R}^n\backslash\Omega_\delta = \{0\}$.

6.34 Esempio. *Sia $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ una distribuzione regolare. Allora $\Omega\backslash\operatorname{supp} T_f$ è il più grande sottoinsieme aperto di Ω su quale $f = 0$ quasi ovunque.*

6.7 Distribuzioni a supporto compatto (complemento)

Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ con $K := \operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$. Se $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ è una qualsiasi funzione test con $\psi \equiv 1$ in un intorno aperto di K,

$$T(\phi) = T(\psi\phi) + T((1-\psi)\phi) = T(\psi\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

visto che $(1-\psi)\phi \in \mathscr{D}(\Omega\backslash\operatorname{supp} T)$ e $T = 0$ in $\Omega\backslash\operatorname{supp} T$. Osserviamo che l'espressione a destra ha senso non solo per $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ma per un qualsiasi $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$! Si può definire su $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ una *metrica* tale che una successione $(\phi_k)_k \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ converge a $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ se e solo se $\partial^\alpha\phi_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha\phi$ uniformemente su ogni $K \subset\subset \Omega$ per ogni multi-indice α. Vale poi il seguente:

6.35 Teorema. *Sia $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a supporto compatto in Ω. Allora esiste un'unica mappa lineare e continua $\widetilde{T} : \mathscr{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tale che*

a) $\widetilde{T}(\phi) = T(\phi)$ *per tutti* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

b) $\widetilde{T}(\phi) = 0$ *per tutti* $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *con* $\phi \equiv 0$ *in un intorno aperto di* $\operatorname{supp} T$.

Si identifica T con la sua estensione e scrive ancora T al posto di $\widetilde{T}$.

6.36 Definizione. *Con $\mathscr{E}'(\Omega)$ si denota lo sottospazio di $\mathscr{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni a supporto compatto in Ω.*

Se $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ ha senso definire $T * \phi$ con $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tramite

$$(T * \phi)(x) = T(\phi(x - \cdot)), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si può dimostrare che $T * \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

6.37 Lemma. *Sia $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora $T * \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Esiste $r > 0$ tale che $\operatorname{supp}\phi \subset B_r(0)$.
$\Rightarrow \operatorname{supp}\phi(x - \cdot) \subset B_r(x)$.
$\operatorname{supp} T$ compatto $\Rightarrow \exists\, M \geqslant 0 \quad \forall_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|x|\geqslant M}} : \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp} T = \varnothing$.
$\Rightarrow \operatorname{supp}\phi(x - \cdot) \subset \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{supp} T \quad \forall_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|x|\geqslant M}} \Rightarrow (T * \phi)(x) = 0$ per tutti x con $|x| \geqslant M$. ∎

6.38 Teorema. *Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e almeno una dei due abbia supporto compatto. Allora esiste un'unica distribuzione $R \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$R * \phi = S * (T * \phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Scriviamo $R = S * T$. Vale $R = T * S$.

É facile vedere che $\delta * T = T * \delta = T$ per ogni $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
La convoluzione di distribuzioni induce mappe bilineari (e continue)

$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) * \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

La covoluzione è commutativa e

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$$

se almeno due delle distribuzioni T_j hanno supporto compatto (associatività). Inoltre,

$$\boxed{\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T), \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.}$$

6.39 Teorema. *Sia $P \neq 0$ un operatore differenziale a coefficienti costanti e sia E una sua soluzione fondamentale. Allora $T := E * S$ con $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ è soluzione dell'equazione $PT = S$.*

6.8 Esercizi

Esercizio 6.1. *$f(x) = \ln|x|$ appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $(T_f)' = \text{pv-}\frac{1}{x}$.*

Esercizio 6.2. *Siano $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Definiamo $aT : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tramite*

$$(aT)(\phi) = T(a\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

a) Dimostrare che $aT \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) Dimostrare che $(aT)' = a'T + aT'$.

Esercizio 6.3. *Sia $P = b\frac{d}{dx} + c$ con $b \neq 0$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e y la soluzione dell'equazione $by' + cy = 0$ con $y(x_0) = 1/b$ e $f(x) := \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ y(x) & : x > x_0 \end{cases}$. Dimostrare che $PT_f = \delta_{x_0}$.*

Esercizio 6.4. *Risolvere le seguenti equazioni impulsive:*

a) $T'' + T = \delta_1$	*b)* $T'' - T' = \delta$	*c)* $T'' - 2T' + 2T = \delta$
d) $T'' + T' - 2T = \delta$	*e)* $T' - T = \delta + \delta_1$	*f)* $T'' + T = \delta + \delta_2$
g) $T'' - T' = \delta'$	*h)* $T'' + T' = \delta'$	*i)* $T'' + 9T' = \delta'$

Esercizio 6.5. *Sia $(T_k)_k \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $T_k \xrightarrow{k\to+\infty} T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e α un multiindice. Dimostrare che $\partial^\alpha T_k \xrightarrow{k\to+\infty} \partial^\alpha T$.*

Esercizio 6.6. *Siano $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Dimostrare che*

$$(S+T)(\phi) := S(\phi) + T(\phi), \qquad (\alpha T)(\phi) := \alpha T(\phi), \qquad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

definiscono distribuzioni $S + T$ e αT in $\mathscr{D}'(\Omega)$. Ovvero, $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio 6.7. *Sia γ una curva regolare in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che γ abbia una parametrizzazione r tale che $r^{-1}(K)$ è compatto per ogni $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dimostrare che*

$$\delta_\gamma(\phi) := \int_\gamma \phi(x)\, ds, \qquad \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

definisce una distribuzione $\delta_\gamma \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 6.8. *Sia $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 > 0, \\ 0 & \text{se } x_1 < 0. \end{cases}$$

Determinare $\partial_1 T_u$ e $\partial_2 T_u$.

Esercizio 6.9. *Trovare una mappa lineare $T \mapsto \overline{T} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tale che $\overline{T_f} = T_{\overline{f}}$ per ogni distribuzione regolare T_f (qui $\overline{f}$ è il complesso coniugato della funzione f).*

Esercizio 6.10. *Sia $g(x) = e^x$ e $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Trovare un'applicazione lineare*

$$T \mapsto T \circ g : \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

tale che $T_f \circ g = T_{f\circ g}$ per ogni distribuzione regolare $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Suggerimento: *Scrivere $T_{f\circ g}(\phi)$ nella forma $T_f(A(\phi))$ con un'operatore opportuno A.*