7 La trasformata di Fourier

Di cosa si tratta? La trasformata di Fourier è una trasformata integrale che trova numerose applicazioni nella fisica, nell'ingegneria e nella matematica. In particolare, è di importanza fondamentale nell'analisi di equazione a derivate parziali e nella teoria dei segnali. Discutiamo la trasformata di Fourier nell'ambito delle funzioni di classe L^1 e L^2.

La trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,} \tag{7.1}$$

dove $x\xi := x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$. Osserviamo che $|e^{-ix\xi}| = 1$, quindi la funzione integranda appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni ξ.

7.1 La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$

7.1 Lemma. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

i) $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

In particolare: $f \mapsto \widehat{f} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *è lineare e limitato.*

ii) $\widehat{f}(\xi) \xrightarrow{|\xi|\to\infty} 0$ (*Lemma di Riemann-Lebesgue*)

Dimostrazione. i) Basta osservare che

$$|e^{-ix\xi} f(x)| \leqslant |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La continuità segue dal teorema della convergenza dominata.

ii) Impiegheremo il Lemma seguente.

Lemma. $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (1 + |\xi|^N)\widehat{g}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.
In particolare: $\widehat{g} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Dimostrazione. Sia prima $n = 1$. Integrazione per parti $\Rightarrow$

$$|\xi^N \widehat{g}(\xi)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{d^N}{dx^N} e^{ix\xi}\Big) g(x)\, dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} g^{(N)}(x)\, dx \right| \leqslant \|g^{(N)}\|_{L^1}$$

$\Rightarrow (1 + |\xi|^N)|\widehat{g}(\xi)| \leqslant C_N := \|g\|_{L^1} + \|g^{(N)}\|_{L^1}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(\xi)|^p \, d\xi \leqslant C_N^p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|\xi|^{pN}} \, d\xi < +\infty \text{ se } N > 1/p.$$

Nel caso $n > 1$ si procede similmente, utilizzando[9]

$$|\xi|^{2N} = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^N = \sum_{|\alpha|=2N} a_{\alpha N} \xi^\alpha$$

con opportune costanti $a_{\alpha N}$ e

$$|\xi^\alpha \widehat{g}(\xi)| \leqslant \|\partial^\alpha g\|_{L^1}.$$

Inoltre, $(1+|\xi|^{2pN})^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$ se $N > n/2p$. ■

Sia dato $\varepsilon > 0$.

Dai risultati della prima parte (Capitolo 2) $\Rightarrow \exists\, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): \quad \|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/2$

i) $\Rightarrow |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| < \varepsilon/2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

Lemma $\Rightarrow \exists\, R > 0 \quad \forall\, |\xi| > R: \quad |\widehat{g}(\xi)| \leqslant \frac{C_1}{1+|\xi|} < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon \quad \forall\, |\xi| \geqslant R.$ ■

7.2 Lemma. *Sia $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. Allora $\widehat{f} = f$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n = 1$. f è soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = -xy(x), \qquad y(0) = 1.$$

Anche $\widehat{f}$ è una soluzione:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}(-ix) f(x)\, dx = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f'(x)\, dx \\
&= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{-ix\xi}\right) f(x)\, dx = i^2 \xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = -\xi \widehat{f}(\xi), \\
\widehat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.
\end{aligned}$$

Unicità della soluzione $\Rightarrow f = \widehat{f}$.

Il caso $n > 1$ segue facilmente (cfr. Esercizio 7.3). ■

[9] Più precisamente, si può dimostrare, procedendo per induzione su $N \in \mathbb{N}_0$,

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove si definisce $\alpha! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, con $x_j^{\alpha_j} \equiv 1$ se $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

7.3 Teorema (Formula di inversione)**.** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Allora*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \textit{quasi ovunque in } \mathbb{R}^n.$$

DIMOSTRAZIONE. Il secondo membro della formula definisce la funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
Siano $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esercizio 7.5.b) e 7.4.b) $\Rightarrow$ Per $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\widehat{h}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (e^{ix\cdot}g)\widehat{\ }(\xi)h(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi - x)h(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(-y)h(x-y)\, dy. \quad (*)$$

Poniamo adesso $G(x) := (2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$ e $G_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow \|G_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, $\|G(\varepsilon\cdot)\|_{L^\infty} = G(0) = (2\pi)^{-n/2}$ e

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\xi) &= G_\varepsilon(-\xi) = \varepsilon^{-n}G(-\xi/\varepsilon) \overset{7.2}{=} \varepsilon^{-n}\widehat{G}(-\xi/\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi/\varepsilon}G(x)\, dx \overset{y=x/\varepsilon}{=} (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi}G(\varepsilon y)\, dy = \widehat{G(\varepsilon\cdot)}(-\xi). \end{aligned}$$

Quindi

$$(G_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(\xi)f(x-\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G(\varepsilon\cdot)}(-\xi)f(x-\xi)\, d\xi \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} G(\varepsilon\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Seguono:

(1) $(G_\varepsilon * f)(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ($G(0) = (2\pi)^{-n/2}$ e convergenza dominata),

(2) $G_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

La (2) sarebbe un risultato della prima parte del corso (Teorema 2 in Capitolo 2) se G_ε fosse un mollificatore. G_ε ha tutte le proprietà di un mollificatore, salvo il fatto che $\operatorname{supp} G_\varepsilon$ non è contenuto nella palla di raggio ε centrato nell'origine. Comunque, utlizzando il forte decadimento di $x \mapsto \exp(-|x|^2/2)$, si può dimostrare che la (2) vale lo stesso (riportiamo la dimostrazione in seguito, ma la escludiamo dallo programma d'esame).

(2) $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_k \to 0 : \quad G_{\varepsilon_k} * f \xrightarrow{k\to+\infty} f$ puntualmente quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$.

(1) $\Rightarrow f = u$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. ∎

Lemma Vale la (2) nelle dimostrazione del Teorema 7.3.

DIMOSTRAZIONE. Lemma 6.4 $\Rightarrow \exists\, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 1,\ \phi(x) = 1 \quad \forall\, |x| \leqslant 1$.

$\rho_k(x) := \phi(x/k)G(x)$, $\rho_{k,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\rho_k(x/\varepsilon)$

$\Rightarrow \rho_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \rho_k \leqslant G$, $\|\rho_k - G\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$,
$\quad c_k := \|\rho_k\|_{L^1} = \|\rho_{k,\varepsilon}\|_{L^1} \leqslant 1$, $c_k \xrightarrow{k\to+\infty} 1$,

per ogni k, $\{\rho_{k,\varepsilon}/c_k\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia di mollificatori
(dai risultati della prima parte (Capitolo 2)).

Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$ arbitrario.

$\|G_\varepsilon * f - f\|_{L^1} \leqslant \|(G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}) * f\|_{L^1} + \|\rho_{k,\varepsilon} * f - c_k f\|_{L^1} + \|c_k f - f\|_{L^1}$.

$\|(G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}) * f\|_{L^1} \leqslant \|G_\varepsilon - \rho_{k,\varepsilon}\|_{L^1}\|f\|_{L^1} = \|G - \rho_k\|_{L^1}\|f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$,

$\|c_k f - f\|_{L^1} = (1 - c_k)\|f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$

$\Rightarrow \exists\, N = N(\delta) \quad \forall\, \varepsilon > 0 : \quad \|(G_\varepsilon - \rho_{N,\varepsilon}) * f\|_{L^1} + \|c_N f - f\|_{L^1} < \delta/2$.

Dai risultati della prima parte del corso (Capitolo 2):

$\|\rho_{N,\varepsilon} * f - c_N f\|_{L^1} = c_N\|\frac{1}{c_N}\rho_{N,\varepsilon} * f - f\|_{L^1} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0$.

Concludiamo quindi: $\exists\, \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \quad \|\rho_{N,\varepsilon} * f - c_N f\|_{L^1} < \delta/2$.

$\Rightarrow \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \quad \|G_\varepsilon * f - f\|_{L^1} < \delta$. ■

7.4 Corollario. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} = \widehat{g}$. Allora $f = g$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. $h := f - g \Rightarrow h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Teorema 7.3 $\Rightarrow h = 0$ quasi ovunque. ■

La trasformata di Fourier inversa di $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con

$$\boxed{\check{f}(x) := (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi = \widehat{f}(-x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.} \tag{7.2}$$

Il Teorema 7.3 implica che

$$f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{\widehat{f}} = (\widehat{f}\,)\check{} = f \text{ quasi ovunque.}$$

Analogamente

$$f, \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\check{f}} = (\check{f}\,)\widehat{} = f \text{ quasi ovunque.}$$

In particolare (cfr. il Lemma nella dimostrazione 7.1),

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \check{\widehat{f}} = f = \widehat{\check{f}} \quad \text{su } \mathbb{R}^n. \tag{7.3}$$

7.2 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

7.5 Lemma (Parseval-Plancherel formula)**.** *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.
Allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, e $(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} = (f, g)_{L^2}$.*

Dimostrazione. **Passo I.** Siano $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esercizio 7.5.b) e $\overline{\widehat{g}} = \check{\overline{g}} \Rightarrow$

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} = \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = \int f(\xi)(\check{\overline{g}})\widehat{\ }(\xi)\, d\xi \overset{(7.3)}{=} \int f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi = (f, g)_{L^2}.$$

Passo II. Sia $\chi_k := \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, |x|\leqslant k\}}$ (funzione caratteristica).

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_k f \xrightarrow{k\to+\infty} f \text{ in } L^1 \text{ e } L^2, \\ (\chi_k f) * \rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } (\chi_k f) * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \chi_k f \text{ in } L^1 \text{ e } L^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, (f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n):\quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^1 e L^2

Passo I $\Rightarrow \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_\ell\|_{L^2} = \|f_k - f_\ell\|_{L^2}$

$\Rightarrow (\widehat{f}_k)$ successione di Cauchy in L^2

$\Rightarrow \exists\, F \in L^2:\quad \widehat{f}_k \xrightarrow{k\to+\infty} F$ in L^2.
(nota: una sottosuccessione di $(\widehat{f}_k)$ converge a F puntualmente quasi ovunque)

Lemma 7.1 $\Rightarrow \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$
(cioè $\widehat{f}_k$ converge a $\widehat{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$, quindi anche puntualmente)

$\Rightarrow \widehat{f} = F \in L^2$ e $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|F\|_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} \|\widehat{f}_k\|_{L^2} \overset{\text{Passo I}}{=} \|f_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} \|f\|_{L^2}$

Passo III. Sia (f_k) come prima e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^1 e L^2.

$\Rightarrow (\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} (\widehat{f}_k, \widehat{g}_k)_{L^2} \overset{\text{Passo I}}{=} (f_k, g_k)_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} (f, g)_{L^2}$. ∎

7.6 Teorema (di Plancherel). *Esiste un'unica $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ con le seguente proprietà:*

a) $\mathscr{F}$ è invertibile, $\mathscr{F} = \widehat{\cdot}$ (cioè, coincide con la trasformata di Fourier (7.1)) e $\mathscr{F}^{-1} = \check{\cdot}$ (cioè, coincide con la trasformata di Fourier inversa (7.2)) in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) $\mathscr{F}$ è un operatore unitario, cioè

$$(\mathscr{F} f, \mathscr{F} g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. $f \in L^2 \Rightarrow \exists\, (f_k) \subset L^1 \cap L^2:\quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2
(per esempio, $f_k = f\chi_k$ con χ_k la funzione caratteristica di $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant k\}$).

Esistenza. Sia $f \in L^2$ e (f_k) come detto.

Lemma 7.5 $\Rightarrow (\widehat{f}_k)$ successione di Cauchy in L^2.

Definiamo $\mathscr{F} f := \lim_{k\to+\infty} \widehat{f}_k$ in L^2.

$\mathscr{F}$ è ben definita. Sia $(h_k) \subset L^1 \cap L^2$ una qualsiasi altra successione tale che $h_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2, analoga a (f_k). Troviamo

$$\|\mathscr{F} f - \widehat{h}_k\|_{L^2} \leqslant \|\mathscr{F} f - \widehat{f}_k\|_{L^2} + \|\widehat{f}_k - \widehat{h}_k\|_{L^2} \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} \|\mathscr{F} f - \widehat{f}_k\|_{L^2} + \|f_k - h_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

Nota bene: per $f \in L^1 \cap L^2$ si può scegliere $f_k := f \Rightarrow \mathscr{F} f = \widehat{f}$.

Continuità e iniettività. $\|\mathscr{F} f\|_{L^2} \xleftarrow{k\to+\infty} \|\widehat{f}_k\|_{L^2} \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} \|f_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to+\infty} \|f\|_{L^2}$
$\Rightarrow \|\mathscr{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \Rightarrow \mathscr{F}$ iniettiva e $\|\mathscr{F}\|_{\mathscr{L}(L^2)} = 1$.

Suriettività. Siano $g \in L^2$ e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^2.
Lemma nella dimostrazione del Lemma 7.1 e (7.3) $\Rightarrow$

$$f_k := \check{g}_k = \widehat{g}_k(-\,\cdot) \in L^1 \cap L^2 \text{ e } \widehat{f}_k = g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g \text{ in } L^2$$

Lemma 7.5 $\Rightarrow \|f_k - f_\ell\|_{L^2} = \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_\ell\|_{L^2} = \|g_k - g_\ell\|_{L^2}$
$\Rightarrow (f_k)$ successione di Cauchy in $L^2 \Rightarrow \exists\, f \in L^2 : \quad f_k \xrightarrow{k\to+\infty} f$ in L^2
$\Rightarrow \mathscr{F} f = \lim_{k\to+\infty} \widehat{f}_k = \lim_{k\to+\infty} g_k = g$

Inversa. Teorema 0.1 $\Rightarrow \mathscr{F}^{-1} \in \mathscr{L}(L^2)$.
Siano $g \in L^1 \cap L^2$ e $(g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g_k \xrightarrow{k\to+\infty} g$ in L^2.
$g_k = \widehat{\check{g}}_k$ e $\check{g}_k \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \mathscr{F}\check{g}_k = \widehat{\check{g}}_k = g_k$
$\Rightarrow \mathscr{F}^{-1} g_k = \check{g}_k = \widehat{h}_k$ dove $h_k := g_k(-\,\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
$h_k \xrightarrow{k\to+\infty} h$ in L^2 dove $h = g(-\,\cdot) \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow$

$$\mathscr{F}^{-1} g \xleftarrow{k\to+\infty} \mathscr{F}^{-1} g_k = \widehat{h}_k = \mathscr{F} h_k \xrightarrow{k\to+\infty} \mathscr{F} h = \widehat{h} = (g(-\,\cdot))\widehat{\ } = \check{g}.$$

Formula. Siano $(f_k), (g_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $f_k \to f$ e $g_k \to g$ in L^2.
$(\mathscr{F} f, \mathscr{F} g) \xleftarrow{k\to+\infty} (\mathscr{F} f_k, \mathscr{F} g_k) = (\widehat{f}_k, \widehat{g}_k) \overset{\text{Lemma 7.5}}{=} (f_k, g_k) \xrightarrow{k\to+\infty} (f, g)$. ■

La scelta di $f_k = \chi_k f$ nella dimostrazione dell'esistenza di $\mathscr{F} f$ implica il seguente:

7.7 Corollario. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathscr{F} f = \lim_{k\to+\infty} f_k$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dove*

$$f_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\leqslant k} e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nota. È di uso comune l'abuso di notazione $\widehat{f}$ per la trasformata di Fourier, indipendentemente dal contesto funzionale (o distribuzionale) adottato, tenendo presenti, ovviamente, i diversi significati di tale simbolo nella definizione data dalla (7.1) per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e dall'estensione fornita dal Teorema 7.6 per $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (cfr. anche la Sezione 8.2.3).

7.3 Esercizi

Esercizio 7.1. *a) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-|x|}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.*

b) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & : |x| \leqslant 1 \\ 0 & : \text{altrimenti} \end{cases}$. Verificare che $\widehat{f}(\xi) = 2\dfrac{\sin\xi}{\xi}$.

Esercizio 7.2. *Dimostrare che, se* $c < (2\pi)^{-1/2}$, *la stima* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant c\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è falsa, fornendo un controesempio. Dunque,* $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *è ottimale.*

Esercizio 7.3. *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $f(x) = e^{-|x|^2/2}$. *Dimostrare che* $\widehat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.

Suggerimento: *Usare* $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ *e* $f(x) = G(x_1)\cdot \ldots \cdot G(x_n)$ *con* $G(t) = e^{-t^2/2}$.

Esercizio 7.4. *Siano* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, A *una matrice* $n \times n$ *reale invertibile e* ${}^tA$ *la sua trasposta. Dimostrare*:

a) *Se* $v(x) = u(x-y) = (\tau_y u)(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)$.

b) *Se* $v(x) = e^{ix\cdot y}u(x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\xi - y) = (\tau_y\widehat{u})(\xi)$.

c) *Se* $v(x) = u(A^{-1}x)$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = |\det A|\widehat{u}({}^tA\xi)$.

d) *Se* $v(x) = \overline{u(x)}$ *allora* $\widehat{v}(\xi) = \overline{\widehat{u}(-\xi)}$.

Ricordando che u *è radiale se* $u(x) = \varphi(|x|)$ *con* φ *funzione definita su* $[0, +\infty)$, *o, equivalentemente,* $u(x) = u(Ax)$ *per ogni matrice ortogonale* A, *dimostrare che*

e) *Se* u *è radiale allora* $\widehat{u}$ *è radiale.*

Esercizio 7.5. *Siano* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dimostrare:*

a) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}\,\widehat{g}$. (**Suggerimento:** *Si ricordi che* $e^{-ix\xi} = e^{-i(x-y)\xi}e^{-iy\xi}$.)

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{g}(\xi)\,d\xi$.

Esercizio 7.6. *Sia* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Dimostrare:*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_{\xi_j}\widehat{f}(\xi) = -i\,\widehat{x_j f}(\xi).$$

Nota: *Iterando queste formule si trova quindi*

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi), \qquad \partial_\xi^\alpha\widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}(\xi),$$

per ogni multi-indice α.

Esercizio 7.7. *a) Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)^2}$. *b) Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}d\xi$.

Suggerimento: *Usare l'Esercizio* 7.1 *e il Teorema di Plancherel.*

Esercizio 7.8. *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

dove $\alpha > -3$, $x \in \mathbb{R}^3$, *così che* $u \in L^1(\mathbb{R}^3)$.