Geom Sup: foglio esercizi #1

March 6, 2026

Sia vol $= dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$.

Data una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, poniamo $\star f := f\,\mathrm{vol} \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$.

Dato un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, definiamo $X^\flat \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ tale che $X^\flat(Y) = X \cdot Y$. Poniamo inoltre $\beta(X) := \iota_X \mathrm{vol}$.

1. Si dimostri che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "grad"] \arrow[d, "Id"] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "curl"] \arrow[d, "\flat"] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "div"] \arrow[d, "\beta"] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "\star"] \\
C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}$$

2. Sia Σ una superficie orientata in $\mathbb{R}^3$. Sia N il versore normale tale che, per ogni base positiva $\{v_1, v_2\}$ di $T_p\Sigma$, $\{N, v_1, v_2\}$ sia una base positiva per $\mathbb{R}^3$. Sia $d\sigma$ la 2-forma area di Σ. Dimostrare che, per ogni vettore X in p,

$$\iota_X \mathrm{vol}_{|\Sigma} = (X \cdot N)\, d\sigma.$$

3. Si dimostri che il teorema della divergenza

$$\int_\Omega div(X)\, \mathrm{dxdydz} = \int_{\partial\Omega} (X \cdot N)\, d\sigma,$$

e il teorema di Stokes

$$\int_S curl(X) d\sigma = \int_{\partial S} (X \cdot T)\, ds,$$

dove ds è la 1-forma lunghezza di $\partial\Sigma$, sono casi particolare del teorema di Stokes enunciato a lezione.

Si concluda che la teoria delle forme differenziali offre una vasta generalizzazione e semplificazione della teoria classica dei campi vettoriali.