Geom Sup: foglio esercizi #3

March 17, 2026

1. Dimostrare che:

- Ogni varietà topologica ammette un ricoprimento numerabile formato da carte omeomorfe ad aperti di $\mathbb{R}^n$.
- Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di palle.
- Ogni intersezione finita di palle è un insieme convesso, dunque omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Concludere che ogni varietà topologica ammette un "buon ricoprimento" numerabile.

Osservazione: Un'affermazione/dimostrazione analoga vale anche per varietà differenziabili. La dimostrazione data in classe usava nozioni di geometria Riemanniana su M.

2. Dimostrare che: se M ammette un buon ricoprimento finito, anche $M\setminus\{p\}$ ammette un buon ricoprimento finito.

3. Dimostrare la validità della successione esatta lunga di Mayer-Vietoris per $H^*_c(M)$ e fornire un'espressione esplicita per l'omomorfismo ∂.

4. Sia M una varietà differenziabile orientata. Sia α una k-forma esatta.

Dimostrare che: α è esatta se e solo se $\int_S \alpha = 0$, per ogni $[S] \in H_k(M)$.

In particolare, se $[S_i]$ generano $H_k(M)$, allora α è esatta se e solo se tutti i "periodi" $\int_{S_i} \alpha$ sono zero.

5. Si può dimostrare che $H_1(M)$ è l'abelianizzato di $\pi_1(M)$. Sfruttando questo fatto, dimostrare che la mappa d'integrazione $H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$ è un isomorfismo.