

Geometria Superiore – Esercizi 4

In questi esercizi analizziamo il concetto di *limite diretto* per una famiglia di gruppi abeliani. Il limite diretto può essere definito mediante una proprietà universale (e quindi è unico) e ammette una costruzione esplicita nella categoria dei gruppi abeliani. Tutto ciò che vedremo vale anche per la categoria degli A -moduli, dove A è un anello unitario fissato e nella categoria degli anelli. Le modifiche necessarie per il caso dei moduli sono ovvie e l'unica difficoltà nel caso degli anelli è dimostrare che il limite di un sistema di anelli con 1 ha ancora l'unità moltiplicativa.

Il limite diretto è usato in molte costruzioni in geometria algebrica, per esempio la spiga di un fascio, la costruzione del fascio associato ad un prefascio, la definizione dei gruppi di coomologia di Čech e altre ancora.

Useremo inoltre le proprietà del limite diretto per dimostrare che il sottomodulo di torsione è esattamente il nucleo della tensorizzazione con il campo dei quozienti.

Il contenuto di queste pagine è preso da Atiyah-Macdonald, Introduzione all'algebra commutativa. In particolare, Esercizi 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 del Capitolo 2 e Esercizio 12 del Capitolo 3. Può essere utile avere a portata di mano il libro facendo gli esercizi, in quanto ci sono suggerimenti e riferimenti al testo che aiutano nella risoluzione.

1 Costruzione del limite diretto

Definizione 1.1. Un insieme parzialmente ordinato I è detto *diretto* se

$$\forall i, j \in I \quad \exists k \in I \text{ tale che } i \leq k, j \leq k$$

Esempio 1.2. Un insieme totalmente ordinato è un insieme diretto.

Esempio 1.3. L'insieme dei sottomoduli (finitamente generati) di un modulo, ordinato per inclusione da $M_i \leq M_j$ se e solo se $M_i \subseteq M_j$.

Con lo stesso ordinamento, l'insieme dei sottogruppi di un gruppo abeliano.

Esempio 1.4. L'insieme degli intorni di un punto $x \in X$, ordinato per inclusione da $U \leq V$ se e solo se $V \subseteq U$ (notare che qui l'ordinamento è "al contrario").

Esempio 1.5. L'insieme dei ricoprimenti aperti di uno spazio topologico X , ordinato per raffinamento: $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se e solo se \mathcal{V} è un raffinamento di \mathcal{U} .

Sia I un insieme diretto e $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di gruppi abeliani. Supponiamo che, per ogni $i, j \in I$, $i \leq j$, sia fissato un omomorfismo di gruppi $\mu_{ij} : M_i \rightarrow M_j$.

Definizione 1.6. $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$ si dice *sistema diretto sull'insieme diretto* I se:

1. μ_{ii} è l'identità di M_i , per ogni $i \in I$;
2. $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$, per ogni $i \leq j \leq k$.

Sia $m \in M_i$ un elemento. Se $i \leq j$, possiamo considerare $\mu_{ij}(m) \in M_j$. Se poi $j \leq k$, possiamo ancora proseguire, considerando $\mu_{jk}(\mu_{ij}(m)) \in M_k$, e così via. La condizione (2) garantisce che il “cammino” percorso da questi elementi è indipendente dalla strada scelta. Inoltre, il fatto che I sia diretto dice che due elementi in due gruppi diversi, $m_i \in M_i$ e $m_j \in M_j$ possono essere confrontati in un gruppo comune, perché $\mu_{ik}(m_i)$ e $\mu_{jk}(m_j)$ appartengono entrambi a M_k .

Usando gli esempi di insiemi diretti dati in precedenza, vediamo alcuni sistemi diretti.

Esempio 1.7. Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi di un gruppo abeliano M tale che per ogni coppia di indici $i, j \in I$ esiste un indice $k \in I$ tale che

$$M_i + M_j \subseteq M_k.$$

(per esempio, la famiglia di tutti i sottogruppi di M , oppure la famiglia dei sottogruppi finitamente generati). I risulta un insieme diretto e prendendo μ_{ij} l'inclusione di M_i in M_j si ha che $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$ è un sistema diretto.

Notiamo che lo stesso vale prendendo M un A -modulo e gli M_j sottomoduli di M .

Esempio 1.8. Sia \mathcal{F} un fascio su X e sia $x \in X$. Sia $I =$ intorni di x e per $U \in I$ poniamo $M_U = \mathcal{F}(U)$, le sezioni di \mathcal{F} su U . Per $U \leq V$ (cioè $V \subseteq U$) ci sono le restrizioni $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. La definizione di prefascio dice che $\mathbf{M} = (\mathcal{F}_U, \rho_{UV})_{U,V \in I}$ è un sistema diretto.

Costruiamo ora un gruppo abeliano M che verrà detto il *limite diretto* del sistema diretto \mathbf{M} . Sia

$$C = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

la somma diretta di tutti i gruppi del sistema. C'è una mappa canonica iniettiva $\varphi_i : M_i \rightarrow C$, definita da $m_i \mapsto (0, \dots, 0, m_i, 0, \dots)$ e identifichiamo M_i con la sua immagine in C . Sia D il sottogruppo di C generato da tutti gli elementi della forma

$$m_i - \mu_{ij}(m_i),$$

per $m_i \in M_i$ e $i \leq j$. Poniamo ora $M = C/D$, e sia $\mu : C \rightarrow M$ la proiezione canonica. Definiamo $\mu_i : M_i \rightarrow M$ come $\mu_i = \mu \circ \varphi_i$.

Definizione 1.9. Il gruppo abeliano M , o meglio la coppia $(M, \{\mu_i\}_{i \in I})$, si dice il *limite diretto* del sistema diretto \mathbf{M} , e si scrive

$$M = \varinjlim M_i$$

Esercizio 1.10. Dimostrare che:

1. se $i \leq j$ allora $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$;

2. se $m \in M$, allora esiste $m_i \in M_i$ tale che $m = \mu_i(m_i)$;
3. se $\mu_i(m_i) = 0$, allora esiste $j \geq i$ tale che $\mu_{ij}(m_i) = 0 \in M_j$.

La (2) dice che ogni elemento del limite proviene da un elemento del sistema diretto, e la (3) dice che un elemento che è nullo “al limite”, era già diventato nullo “al finito”.

Nel caso dell'esempio 1.7, il limite diretto ha un significato particolare: ricordiamo che, se M_i, M_j sono sottogruppi dello stesso gruppo abeliano M , la *somma* $M_i + M_j$ è il sottogruppo generato da $M_i \cup M_j$, e cioè l'intersezione di tutti i sottogruppi che contengono sia M_i che M_j . Nel caso di una somma infinita, la definizione è la stessa:

$$\sum M_i = \text{sottogruppo generato da } \bigcup M_i = \bigcap_{N \supseteq \bigcup M_i} N$$

La definizione di somma di sottomoduli è la stessa.

Esercizio 1.11. Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi (sottomoduli) di un gruppo abeliano (di un A -modulo) M tale che per ogni coppia di indici $i, j \in I$ esiste un indice $k \in I$ tale che

$$M_i + M_j \subseteq M_k.$$

Definiamo $i \leq j$ se e solo se $M_i \subseteq M_j$, e μ_{ij} l'inclusione. Dimostrare che:

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i$$

Corollario 1.12. Ogni gruppo abeliano (A -modulo) è il limite diretto dei suoi sottogruppi (sottomoduli) finitamente generati.

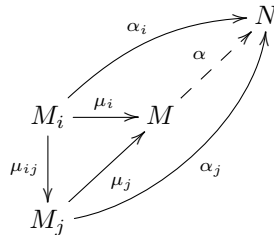
Dimostrazione. La famiglia dei sottogruppi finitamente generati soddisfa la condizione dell'esercizio precedente, ponendo $M_k = M_i + M_j$, che è finitamente generato se M_i e M_j lo sono. Inoltre ogni elemento $m \in M$ appartiene al sottogruppo ciclico $\mathbb{Z}m$ (sottomodulo ciclico Am), che è finitamente generato. \square

2 Proprietà universale del limite diretto

Enunciamo ora e dimostriamo la proprietà universale del limite diretto:

Teorema 2.1. Sia $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i, j \in I}$ un sistema diretto e sia $M = \varinjlim M_i$. Sia N un gruppo abeliano e sia $\{\alpha_i\}$ una famiglia di omomorfismi $\alpha_i : M_i \rightarrow N$, tale che $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ per ogni $i \leq j$. Allora esiste un unico omomorfismo $\alpha : M \rightarrow N$ tale che $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ per ogni $i \in I$.

Facciamo un disegno:



Il teorema afferma che se abbiamo tutte le frecce continue (e il diagramma è commutativo), allora esiste un'unica freccia tratteggiata α , in modo che il diagramma completo sia ancora commutativo. Il triangolo interno, di vertici M_i , M_j e M è commutativo per la definizione di limite diretto (e l'esercizio 1.10, punto 1), il triangolo esterno, di vertici M_i , M_j e N è commutativo per le ipotesi del teorema.

Dimostrazione. Per definizione, $M = C/D$, dove $C = \oplus M_i$. Definiamo per prima cosa una mappa $\alpha : C \rightarrow N$ nel seguente modo: ogni elemento di C è somma, in modo unico, di un numero finito di elementi degli M_i ,

$$c = m_{i_1} + \cdots + m_{i_t}$$

Definiamo allora

$$\alpha(c) = \alpha_{i_1}(m_{i_1}) + \cdots + \alpha_{i_t}(m_{i_t})$$

La mappa α è ben definita e unicamente determinata dalle mappe α_i (per la proprietà universale della somma diretta). È anche immediato verificare che α è un omomorfismo.

Vediamo ora che per ogni $d \in D$ si ha $\alpha(d) = 0$, e quindi α induce una mappa dal quoziente $C/D = M$ in N . Basta naturalmente verificare questo per i generatori di D , e sia quindi $m_i - \mu_{ij}(m_i)$, con $i \leq j$ uno di questi generatori, con $m_i \in M_i$ e (quindi) $\mu_{ij}(m_i) \in M_j$. Dunque:

$$\alpha(m_i - \mu_{ij}(m_i)) = \alpha_i(m_i) - \alpha_j(\mu_{ij}(m_i)) = 0$$

per la commutatività del triangolo esterno. \square

Poiché il limite diretto possiede una proprietà universale, è l'oggetto iniziale di una opportuna categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$, costruita a partire dal sistema diretto \mathbf{M} .

Esercizio 2.2. Definire la categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$, specificandone gli oggetti e i morfismi, e indicando perché il limite diretto è l'oggetto iniziale (o terminale) di questa categoria.

3 Proprietà di esattezza del limite diretto

Sia I un insieme diretto e siano $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})_{i,j \in I}$, $\mathbf{N} = (N_i, \nu_{ij})_{i,j \in I}$ due sistemi diretti.

Definizione 3.1. Un omomorfismo $\Phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ è una famiglia di omomorfismi $\varphi_i : M_i \rightarrow N_i$ tali che $\varphi_j \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \varphi_i$, per ogni $i \leq j$.

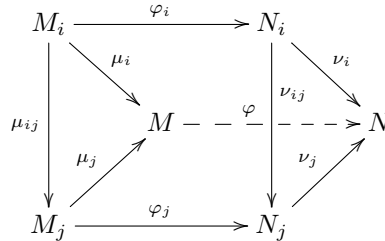
La condizione afferma che, per $i \leq j$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & N_i \\ \mu_{ij} \downarrow & & \downarrow \nu_{ij} \\ M_j & \xrightarrow{\varphi_j} & N_j \end{array}$$

Siano ora $M = \varinjlim M_i$, $N = \varinjlim N_i$, e siano μ_i, ν_i gli omomorfismi associati.

Lemma 3.2. Un omomorfismo $\Phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ di sistemi diretti definisce un unico omomorfismo $\varphi = \varinjlim \varphi_i : M \rightarrow N$ tale che $\varphi \circ \mu_i = \nu_i \circ \varphi_i$

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma



Definendo $\alpha_i = \nu_i \circ \varphi_i$ otteniamo una famiglia di omomorfismi dagli M_i in N che commuta con le mappe $\{\mu_{ij}\}$ (leggendo il perimetro esterno del diagramma). Abbiamo quindi indotta (per la proprietà universale) una unica mappa $\varphi : M \rightarrow N$ con le proprietà richieste. \square

Definizione 3.3. Una successione di sistemi diretti (sullo stesso insieme I) e omomorfismi

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{P}$$

è esatta se per ogni $i \in I$ la corrispondente successione di gruppi abeliani (moduli) è esatta.

Esercizio 3.4. Se $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{P}$ è esatta, allora la successione $M \rightarrow N \rightarrow P$ dei limiti diretti è esatta.

Dunque il funtore limite diretto è un funtore esatto, e cioè trasforma tutte le successioni esatte in successioni esatte.

4 Il prodotto tensoriale commuta con il limite diretto

In questo paragrafo consideriamo solo A -moduli, dove A è un anello commutativo unitario fissato.

Sia $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$ un sistema diretto, e sia N un modulo fissato. È immediato verificare che $\mathbf{M} \otimes N = (M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes 1)$ è un sistema diretto (se non vi è chiaro, fate la verifica in dettaglio, ma non è un esercizio da consegnare). Poniamo $M = \varinjlim M_i$ e $P = \varinjlim (M_i \otimes N)$. Per ogni $i \in I$ c'è un omomorfismo

$$\mu_i \otimes 1 : M_i \otimes N \rightarrow M \otimes N$$

e quindi per la proprietà universale del limite diretto c'è un omomorfismo indotto

$$\psi : P \rightarrow M \otimes N$$

Esercizio 4.1. Dimostrare che ψ è un isomorfismo.

Possiamo enunciare questo risultato come

$$\varinjlim (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes N$$

5 Torsione di un modulo

Sia A un dominio di integrità e M un A -modulo. Ricordiamo che $m \in M$ è un elemento di *torsione* se $\text{Ann}(m) \neq 0$, cioè se esiste $a \in A$, $a \neq 0$ tale che $am = 0$ (vedi anche le dispense, Esercizio 6 alla fine del Capitolo 2).

L'insieme $T(M) = \{m \in M \mid m \text{ è di torsione}\}$ è un sottomodulo di M e viene detto *sottomodulo di torsione*. M si dice *privo di torsione* se $T(M) = 0$.

Esercizio 5.1. Dimostrare che:

1. per ogni M , il modulo $M/T(M)$ è privo di torsione cioè $T(M/T(M)) = 0$;
2. se $f : M \rightarrow N$ è un omomorfismo, allora $f(T(M)) \subseteq T(N)$;
3. se $0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow N$ è esatta, allora $0 \rightarrow T(P) \rightarrow T(M) \rightarrow T(N)$ è esatta;

Enunciamo finalmente il risultato annunciato nell'introduzione:

Teorema 5.2. *Sia A un dominio d'integrità, K il suo campo dei quozienti (campo delle frazioni) e M un A -modulo. Sia $f : M \rightarrow M \otimes_A K$ l'omomorfismo di A -moduli dato da $f(m) = m \otimes 1$. Allora $T(M) = \ker f$.*

Dimostrazione. Esercizio. (leggere l'Atiyah-Macdonald!) □

Riferimenti bibliografici

- [AM] M. F. Atiyah, I. G. MacDonal, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969