(ii) e

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f+g) \begin{cases} = \min(\mathrm{ord}_{z_0} f, \mathrm{ord}_{z_0} g) & \mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq \mathrm{ord}_{z_0}(g) \\ \geq \mathrm{ord}_{z_0} f & \mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{ord}_{z_0} g \end{cases}$$

10

$\rightsquigarrow$ definiamo l'ordine in un punto anche per una funz. meromorfa su una sup. di Riemann, componendo con una carta locale; l'ordine sarà ben definito e soddisfa (3).

<u>Mappe tra superfici di Riemann</u>

Siano X, Y sup. di Riemann e $F: X \to Y$ applicazione.

<u>Def</u> F è olomorfa in $p \in X$ se esistono:

- una carta locale $\varphi_1: U_1 \to V_1$ di X con $p \in U_1$
- una carta locale $\varphi_2: U_2 \to V_2$ di Y con $F(p) \in U_2$

t.c. $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ sia definita e olomorfa in $\varphi_1(p)$.

- F è olomorfa se lo è in ogni pto del suo dominio.

<u>Proprietà elementari</u>:

1) $Id_X : X \to X$ e le funzioni costanti sono olomorfe

2) la def. non dipende dalla scelta di φ_1, φ_2

3) Se $Y = \mathbb{C}$, riotteniamo la nozione di funzione olomorfa.

4) Se $F : X \to Y$ è olomorfa, allora F è anche continua, C^∞, e preserva l'orientazione.

5) La composizione di mappe olomorfe è olomorfa.

<u>Def</u> Un ISOMORFISMO (BIOLOMORFISMO) tra superfici di Riemann è $F : X \to Y$ olomorfa, biunivoca, t.c. $F^{-1} : Y \to X$ è olomorfa.

- in tal caso X e Y sono anche diffeomorfe e omeomorfe.
- se compatte, hanno lo stesso genere topologico

Proprietà delle mappe olomorfe.

1) <u>Principio di identità</u>:

Siano X, Y sup. di Riemann

$F, G : X \to Y$ olomorfe

~~Allora~~ Sia $S := \{ x \in X \mid F(x) = G(x) \}$.

Allora o $S = X$ oppure S è discreto in X.

Dim. per esercizio.

2) Teorema delle mappe aperte:

Siano $F: X \to Y$ olomorfa e non costante. Allora F è un'applicazione aperta.

Dim. per esercizio

Coroll. Sia $F: X \to Y$ olomorfa e non costante. Allora $F^{-1}(y)$ è discreto in X $\forall y \in Y$.
(segue dal principio d'identità).

Teorema. Sia X una superficie di R. cpta e $F: X \to Y$ una ~~funzione olomorfa~~ mappa olomorfa non costante.
Allora:
1) F è suriettiva
2) Y è compatta
3) $\forall y \in Y$ $F^{-1}(y)$ è finito (non $\emptyset$).

$\boxed{\text{Dim}}$. F non costante $\Rightarrow$ aperta $\Rightarrow$ $F(X)$ aperto in Y
. X cpto $\Rightarrow$ $F(X)$ cpto $\Rightarrow$ $F(X)$ chiuso in Y
$\Rightarrow Y = F(X)$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ / sfera di Riemann

$\downarrow$ due carte locali

$\overset{\in \mathbb{C}}{z} \mapsto (z:1)$

$\underset{\mathbb{C}}{\overset{w}{\wedge}} \mapsto (1:w)$

$\downarrow$

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

due carte locali

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{C}_\infty$ sono biolomorf tramite

$$F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_\infty$$
$$(z:1) \mapsto z$$
$$(1:0) \mapsto \infty$$

Sia X una superficie di Riemann. C'è una corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{funzioni} \\ \text{meromorfe } f \\ \text{su } X \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{mappe olomorfe} \\ F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty \\ \text{non costanti} \equiv \infty \end{matrix} \right\}$$

Vediamo come.

Data $f \in \mathcal{M}(X)$, definiamo

$$F : X \to \mathbb{C}_\infty$$

ponendo:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{se } x \text{ non è un polo} \\ \infty \in \mathbb{C}_\infty & \text{se } x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

Equivalentemente:

$F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

è data da: $$F(x) = \begin{cases} (f(x):1) & \text{se } x \text{ non è un polo} \\ (1:0) & \text{se } x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

· per ~~dif~~ verificare che F è olomorfa:

nell'intorno di un pto $x_0 \in X$ che non è un polo

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$(z:1) \xmapsto{\psi_0} z \in \mathbb{C}$ è una carta locale

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi_0"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

f olom. nell'intorno di $x_0 \in X$

$\Rightarrow F$ è olomorfa nell'intorno di $x_0 \in X$

· Se $x_0 \in X$ è un polo per f, allora nell'intorno U di x_0 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ è olomorfa in x_0 e nulla in x_0

$\Rightarrow$ ~~nell'intorno U di~~ in $U \setminus \{x_0\}$ abbiamo

$$F(x) = (f(x):1) = \left(\frac{1}{g(x)} : 1\right) = \underbrace{(1 : g(x))}_{\text{olom. in tutto } U}$$

$$F(x_0) = (1 : g(x_0)) = (1:0)$$

Consideriamo l'altra carta locale di $\mathbb{P}^1$:

$(1:w) \xmapsto{\psi_1} w \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\psi_1"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

g olomorfa

$\Rightarrow F$ è olomorfa in U

$\Rightarrow F$ è olomorfa su X.

Viceversa:
sia data $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, non costante in $(1:0)$

$\Rightarrow S := F^{-1}\{(1:0)\}$ è un sottoinsieme discreto di X

$(z_0 : z_1)$

$$F(X \setminus S) \subseteq U_1 := \{z_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| $$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(1:0)\}$$

$$\Rightarrow F_{|X \setminus S} = (f(x) : 1)$$

$$f : X \setminus S \to \mathbb{C}$$

Esercizio Verificare che f è ~~meromorfa~~ olomorfa su $X \setminus S$ e ha dei poli in S.

$\Rightarrow f$ è meromorfa su X.

- Data X superficie di Riemann
$F: X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ non costante in $(1:0)$
$S := F^{-1}((1:0))$ discreto in X

$$F_{|X \setminus S} = (f(x) : 1) \qquad f: X \setminus S \to \mathbb{C}$$

- f è la composizione di $F_{|X\setminus S}$ con la carta locale di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \supset U_1 = \{z_1 \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \qquad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

$\boxed{F \text{ olomorfa} \Rightarrow f \text{ olomorfa su } X \setminus S}$

Posto $Z := F^{-1}((0:1))$

- f è regolare e nulla in Z

$$F(X \setminus Z) \subseteq U_0 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{(0:1)\}$$

$$\Rightarrow F_{|X \setminus Z} = (1 : g(x)) \qquad g: X \setminus Z \to \mathbb{C}$$

- g è la composizione di $F_{|X \setminus Z}$ con ~~la carta~~ l'altra carta locale di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \supset U_0 = \{z_0 \neq 0\}$

$$U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \qquad (z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_1}{z_0}$$

Su $X \setminus S \setminus Z$ si ha:

$$(f(x) : 1) = (1 : g(x)) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

- $\frac{1}{f}$ è olomorfa in $S \Rightarrow f$ ha dei poli in S

$\Rightarrow f \in \mathcal{M}(X)$.

<u>OSS</u> Se X è una sup. di Riemann cpta, allora $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ non costante $\Longleftrightarrow \exists F : X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Esercizio Sia X compatta e $f \in \mathcal{M}(X)$ non costante. Mostrare che f ha almeno uno zero e almeno un polo.

Sia f meromorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$

$\mathrm{ord}_{z_0} f = m \in \mathbb{Z}$ se localmente

$$f = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n$$

con: $\boxed{a_m \neq 0}$

- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) < 0 \Longleftrightarrow f$ ha un polo in z_0, e in tal caso $|\mathrm{ord}_{z_0}(f)|$ è l'ordine del polo
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0 \Longleftrightarrow f$ è olomorfa e non nulla in z_0
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) > 0 \Longleftrightarrow f$ è olomorfa e nulla in z_0, e in tal caso $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ è l'ordine dello zero.

Prop. (forma normale locale).
Siano X, Y due superfici di Riemann e $F: X \to Y$ olomorfa non costante.
Sia $p \in X$.
Esiste ed è unico un intero $m \geq 1$ t.c.
per ogni carta locale $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ di Y centrata in $F(p)$ (cioè $F(p) \in U_2$ e $\varphi_2(F(p)) = 0$)

esiste una carta locale $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ di X centrata in p t.c. l'espressione di F nelle carte locali sia

$$z \mapsto z^m$$

cioè $(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})(z) = z^m$

. m è detto MOLTEPLICITÀ di F in p
" $\mathrm{mult}_p F$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Fissiamo una carta locale $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ per Y, centrata in $F(p)$.
Scegliamo una carta locale $\psi : U \to V$ per X, centrata in p.
Sia $T : V \to V_2$ l'espressione di F nelle carte locali
$T(w) = \varphi_2(F(\psi^{-1}(w)))$
$T(0) = 0$, T olomorfa

Sia $m = \mathrm{ord}_0 T$.

Allora:
- $m \geq 1$
- m è l'ordine della prima derivata non nulla di T in $w=0$

~~[illegible]~~ $T(w) = \sum_{n \geq m} a_n w^n =$

$$= w^m \underbrace{\sum_{n \geq m} a_n w^{n-m}}_{\text{olom. } \neq 0 \text{ in } U(0)}$$

$\rightsquigarrow$ la posso scrivere come $h(w)^m$

con h olom. e non nulla in $U(0)$

$$\rightsquigarrow T(w) = (\underbrace{w\, h(w)}_{\eta(w)})^m$$

$\eta(w)$ biolom. locale, $\eta(0) = 0$

perché $\eta'(0) \neq 0$.

tra due intorni dell'origine in $\mathbb{C}$.

Poniamo $\varphi_1 := \eta \circ \varphi : U_1 \to V_1 \subseteq \mathbb{C}$, $U_1 \subseteq U$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_1"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

- φ_1 è ancora una carta locale
- $\varphi_1(p) = \eta(\varphi(p)) = \eta(0) = 0$.

L'espressione di F rispetto alle nuove carte φ_1 e ψ_2 è (9)

$$\psi_2(F(\varphi_1^{-1}(z)) =$$
$$= \psi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z))))$$
$$= T(\eta^{-1}(z)) = (\eta(\eta^{-1}(z)))^m$$
$$(z = \eta(w)) \qquad = z^m$$

Allora: oss. che per ogni intorno A di p $\exists \tilde{A} \subseteq A$ intorno aperto di p t.c. se consideriamo la restrizione $F_{|\tilde{A}} : \tilde{A} \to \underbrace{F(\tilde{A})}_{\text{intorno aperto di } F(p)}$

Si ha:

1) P è l'unica controimm. di $F(p)$ in $\tilde{A}$ $\qquad z \mapsto z^m$

2) ogni punto $q \in F(\tilde{A})$ diverso da $F(p)$ ha esattamente m controimm. in $\tilde{A}$

$\Rightarrow$ m dipende solo dalle proprietà di F nell'intorno di p.

$\Rightarrow$ non dipende dalle ψ_2 carte locali di 4 scelte inizialmente

OSS 1

$m = 1 \Longrightarrow$ F è biolom. locale in p (cioè è biolom. tra un intorno aperto di p in X e un intorno aperto di $F(p)$ in Y)

$m > 1 \Longrightarrow$ F non è iniettiva in nessun intorno di p

$\rightsquigarrow$ sono equivalenti:
(i) $\mathrm{mult}_p F = 1$
(ii) F è biolom. locale in p
(iii) F è iniettiva in un intorno di p.

OSS 2 Siano $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to V_2$

t.c. $\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m \quad \forall z \in U_1$

$\forall q \in U_1 \setminus \{p\}$, $\exists$ un intorno A_q di q in U_1 t.c. $F_{|A_q}$ sia iniettiva

(perché $z \mapsto z^m$ è ~~invertibile~~ localm. iniettiva in ogni $t \neq 0$).

$\Longrightarrow \forall q \in U_1 \setminus \{p\}$, $\mathrm{mult}_q F = 1$.

Cor. I punti $p \in X$ in cui $\mathrm{mult}_p F > 1$ formano un sottoinsieme discreto di X.