③

$$\Rightarrow 0 = \sum_{x \in F^{-1}((0:1))} \mathrm{ord}_x f + \sum_{x \in F^{-1}((1:0))} \mathrm{ord}_x f$$

$$= \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x f .$$

<u>Prop</u> Sia X una superficie di Riemann cpta t.c. esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ avente un unico polo, ~~semplice~~ di ordine 1. Allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

DIM. Sia $F : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la mappa olomorfa associata a f. Dalla dim. precedente vediamo che $\deg F = 1 \Rightarrow F$ è isomorfismo

---

<u>Formula di Hurwitz.</u>

X sup. di Riemann cpta

- X è una superficie topol. cpta e orientabile di genere $g(X)$

Se prendiamo una triangolazione di X con: v vertici, e lati, f triangoli

allora $\underbrace{\chi_{top}(X)}_{\text{caratteristica di Eulero}} = v - e + f = 2 - 2g(X)$

<u>Teorema</u> (formula di Hurwitz).

Sia $F: X \to Y$ olomorfa non costante tra superfici di Riemann cpte. Allora:

$$2g(X)-2 = (\deg F)\cdot(2g(Y)-2) + \underbrace{\sum_{p\in X}\left[\mathrm{mult}_p F - 1\right]}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ La somma ha senso perché i punti di ramificazione sono finiti.

Consideriamo i punti di diramazione di F in Y (in numero finito), e scegliamo una triangolazione per Y t.c. ogni pto di diramazione sia un vertice.

Siano: v il numero di vertici
e il numero di lati
f " " triangoli.

Solleviamo la triangolazione a X tramite la mappa F.

$$v - e + f = 2 - 2g(Y)$$

- i vertici della triangolazione di X sono le controimmagini dei vertici in Y.
- Se $e \subset Y$ è un lato <u>aperto</u> della triangolazione, $F^{-1}(e) \to e$ è un rivestimento topologico di grado d

Ma ℓ è contraibile
$\Rightarrow \quad F^{-1}(\ell) = \ell_1 \sqcup \dots \sqcup \ell_d$
t.c. $F_{|\ell_i} : \ell_i \to \ell$ è omeom.
$\rightsquigarrow$ otteniamo d lati in X.

- se $D \subset Y$ è l'interno di un triangolo, $F^{-1}(D) = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_d$ con $F_{|D_i} : D_i \to D$ omeomorfismo.

$\rightsquigarrow$ otteniamo una triangolazione in X con v' vertici, ℓ' lati, f' facce e:
$f' = d \cdot f$, $\ell' = d \cdot \ell$. $(d = \deg F)$

Dobbiamo calcolare $v' = |F^{-1}(\text{vertici di } Y)|$

Sia $q \in Y$ un vertice. Allora

$$|F^{-1}(q)| = \Big(\sum_{p \in F^{-1}(q)} 1\Big) - d + d =$$

$$= \Big(\sum_{p \in F^{-1}(q)} 1\Big) - \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p F + d =$$

$$= d + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \mathrm{mult}_p F)$$

$$v' = \sum_{\substack{q \text{ vertice} \\ \text{in } Y}} |F^{-1}(q)| = \sum_{\substack{q \text{ vertice} \\ \text{in } Y}} \Big(d + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \mathrm{mult}_p$$

$$= d \cdot v - \sum_{\substack{p \text{ vertice} \\ \text{di } X}} \left(\mathrm{mult}_p F - 1 \right) =$$

$$= d \cdot v - \sum_{p \in X} \left(\mathrm{mult}_p F - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \quad 2g(X) - 2 = -\chi_{Top}(X) = -v' + e' - f'$$

$$= -d \cdot v + \sum_{p \in X} \left(\mathrm{mult}_p F - 1 \right) + d \cdot e - d \cdot f$$

$$= d \underbrace{(-v + e - f)}_{2g(Y)-2} + \sum_{p \in X} (\cdots) =$$

$$= (\deg F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} \left(\mathrm{mult}_p F - 1 \right).$$

<u>Applicazioni</u>: Se $F : X \to Y$ olomorfa non costante tra superfici di R. <u>cpte</u>.

1) $g(X) \geq g(Y)$.

Infatti: $g(X) = 1 + \overbrace{(\deg F)}^{\geq 1}(g(Y) - 1) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p F - 1)}_{\geq 0}$

$$\geq 1 + g(Y) - 1 = g(Y)$$

2) Se F ~~non è~~ isomorfismo, allora:

$$g(X) > g(Y)$$

$$g(X) = g(Y) \leq 1.$$

Infatti se F non è isomorfismo, allora $\deg F \geq 2$

$$\Rightarrow g(X) \geq 1 + 2(g(Y) - 1) = 2g(Y) - 1$$

$$2g(Y) - 1 > g(Y) \quad \text{se } g(Y) \geq 2.$$

3) Sia $Y = \mathbb{P}^1$: $F : X \to \mathbb{P}^1$

Se F non è isomorfismo, allora F deve ramificare.

Infatti:

$$\underbrace{2g(X) - 2}_{\geq -2} = \underbrace{(\overbrace{\deg F}^{\geq 2}) \cdot (-2)}_{\leq -4} + \underbrace{\sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p F - 1)}_{\neq 0}$$

4) Se X e Y hanno genere 1, allora F non ramifica $\to$ è un rivestimento topologico.

Esempi:

1) X = toro complesso

$$\pi : \mathbb{C} \to X = \mathbb{C}/\Gamma \quad \Gamma \text{ reticolo}$$

- π è olomorfa e ha molteplicità 1 in ogni pto.

2) $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$
è olomorfa e ha molt. 1 in ogni punto.

OSS Sia $X \subset \mathbb{C}^2_{x,y}$ curva piana affine non singolare

$X = V(f)$

$f \in \mathbb{C}[x,y]$ t.c. $\forall p \in X$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right) \neq (0,0).$$

Sia $p = (x_0, y_0) \in X$.

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$: localmente in p X è grafico di una funzione olomorfa

$$y = g(x) \qquad g : U(x_0) \to \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow X \cap U(p) = \{ (x, g(x)) \mid x \in U(x_0) \}$$

e la proiezione sull'asse x

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$
$$(x, y) \mapsto x$$

è una carta locale per X in p.

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$: allora $\frac{\partial f}{\partial x}(p)\neq 0$

e localmente in p X è il grafico di una funzione olomorfa $x=h(y)$ $h:U(y_0)\to\mathbb{C}$

e y è una coord. locale per X in p.

Consideriamo la proiezione $\pi: X \to \mathbb{C}$
$(x,y)\mapsto x$

come mappa tra superfici di Riemann (olomorfa!)

Calcoliamo $\mathrm{mult}_p\pi$ al variare di p.

- Se $\frac{\partial f}{\partial y}(p)\neq 0$: allora π è una carta locale in p
$\Rightarrow \mathrm{mult}_p\pi = 1$.

- Supponiamo $\frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$: allora y è una coord. locale per X in p e localmente π è data da
$x=h(y)$ (espressione locale)

Inoltre dal Teorema della funz. implicita

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h(y),y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(h(y),y)}$$

$=\varphi$

olom. e non nulla in $U(y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}[x,y]$ è definita una (12)

funzione olomorfa $\varphi : X \to \mathbb{C}$

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_{y_0} h'(y) = \operatorname{ord}_p \varphi$

Inoltre $\operatorname{mult}_p \pi = \underbrace{\operatorname{ord}_{y_0}(\underbrace{h(y) - x_0}_{\text{olomorfa e nulla in } y_0})}_{\text{espressione locale}}$

ordine della prima derivata $\neq 0$ in y_0

$\| $

$\operatorname{ord}_{y_0} h'(y) + 1$

$\|$

$\operatorname{ord}_p \varphi + 1$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{mult}_p \pi = \operatorname{ord}_p \varphi + 1} \ (*)$$

$\pi : X \to \mathbb{C}$ $\qquad \varphi : X \to \mathbb{C}$

$(x,y) \mapsto x$ $\qquad p \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

$\forall p \in X$ t.c. $\varphi(p) = 0$.

Ma se $\varphi(p) \neq 0$: $\operatorname{ord}_p \varphi = 0$

$\operatorname{mult}_p \pi = 1$

$\Rightarrow (*)$ vale ancora

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{mult}_p \pi = \operatorname{ord}_p \varphi + 1} \quad \forall p \in X.$$

<u>Nota</u>: se fisso $x_0 \in \mathbb{C}$ $\pi^{-1}(x_0) = \{ (x_0, y) \mid f(x_0, y) = 0 \}$.

Genere di una curva piana, proiettiva.

Sia $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica non singolare di grado d.
$X = V(F)$

$F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ omogeneo di grado d

$\forall p \in X \quad \exists i \in \{0,1,2\}$ t.c. $\frac{\partial F}{\partial z_i}(p) \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ X è una superficie di Riemann compatta.
$\downarrow$ perché X è chiuso in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cpto.

(nota: X è sempre connesso).

Vogliamo mostrare che:

$$g(X) = \frac{(d-1)\cdot(d-2)}{2}$$

Formula del genere

A meno di proiettività possiamo supporre che: $(0:1:0) \notin X$.

$\rightsquigarrow$ Consideriamo la proiezione da $(0:1:0)$

$$\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$
$$(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (z_0 : z_2).$$

- π è olomorfa e non costante

$\to$ dalla formula di Hurwitz:

$$2g(X)-2 = (\deg \pi)\cdot(-2) + r$$ (14)

$$r := \sum_{p\in X} (\mathrm{mult}_p \pi - 1)$$

Mostriamo che $\deg \pi = d$ (grado di X) e calcoliamo r.

Consideriamo $U_2 = \{z_2 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\cong$}}\ \mathbb{C}^2_{x,y}$ $\quad x = \frac{z_0}{z_2},\ y = \frac{z_1}{z_2}$

$X_2 = X \cap U_2$

Nota: $X_2 = \pi^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0)\})$

$X \setminus X_2 = \pi^{-1}\{(1:0)\}$

$\pi_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x,y) \longmapsto x$ $\qquad x = \frac{z_0}{z_2}$ espressione locale di π in X_2

X_2 ha equazione $f(x,y)=0$
dove $f(x,y) = F(x, y, 1)$

Nota: $(0:1:0) \notin X \Rightarrow F(0,1,0) \neq 0$

$\Rightarrow z_1^d$ ha coeff. $\neq 0$ in F

$\Rightarrow f$ ha grado d e y^d compare in f

$\Rightarrow$ per $x_0 \in \mathbb{C}$ $\quad \pi_2^{-1}(x_0) = \{y \mid f(x_0,y)=0\}$
$= d$ radici (con molteplicità)

$\Rightarrow \boxed{\deg \pi = d}$

Oss Sia $\underset{V(f)}{\overset{\shortparallel}{X}} \subseteq \mathbb{C}^2_{x,y}$ curva algebrica piana, affine, non singolare, irriducibile

$f \in \mathbb{C}[x,y]$

$\pi : X \to \mathbb{C}$ proiezione sull'asse x
$(x,y) \mapsto x$

Supp. π non costante (cioè X non è una retta ~~...~~ verticale cioè y compare in f)

~~Sia~~ Consideriamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}[x,y] \quad \text{(non costante)}.$$

e sia $\varphi : X \to \mathbb{C}$ la mappa data da $\frac{\partial f}{\partial y}$

(φ è olomorfa).

Mostriamo che: $\boxed{\text{mult}_p \pi = \text{ord}_p \varphi + 1}$ $(*)$
$\forall p \in X$.

Infatti:

se p è t.c. $\varphi(p) \neq 0$, cioè $\text{ord}_p \varphi = 0$:

allora $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0 \Rightarrow$ nell'intorno di p, X è grafico di una funzione olomorfa $y = g(x)$
$(x, g(x))$

e π è una carta locale $\Rightarrow \text{mult}_p \pi = 1$.
$\Rightarrow$ vale $(*)$

non annulla φ in pto in cui $\varphi(p)=0$.

Allora $\frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$, e X è non singolare

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p)\neq 0$ e localmente in p X è il grafico di una funzione olomorfa

$$x = h(y)$$

$\Rightarrow$ ~~$h(y)$~~ y è coord. locale

e $h(y)$ è l'espressione locale di π in questa coord. locale.

Se $p=(x_0,y_0)$, abbiamo allora:

$$\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{ord}_{y_0}\left(\underline{h(y)-x_0}\right) =$$

$$= \mathrm{ord}_{y_0} h'(y) + 1$$

Dal Teorema della funz. implicita (versione olomorfa):

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h(y),y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(h(y),y)} \quad \begin{array}{l} \} \text{ è espressione locale di } \varphi \\ \} \text{ dom. e } \neq 0 \text{ in } U(y_0) \end{array}$$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_{y_0} h' = \mathrm{ord}_p \varphi$ ~~ecc~~

$\Rightarrow$ segue $(*)$.

GEOMETRIA SUPERIORE 21/4/2022

Riprendiamo dalla scorsa lezione ①
la dim. della formula del genere.

Sia $\varphi \in \mathcal{O}(X_2)$ data dalla polinomio $\frac{\partial f}{\partial y}$

Allora $\forall p \in X_2$ si ha:

OSS. vista l'ultima lezione

$$\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{mult}_p \pi_2 = 1 + \mathrm{ord}_p \varphi$$

$\Rightarrow \mathrm{mult}_p \pi - 1 = \mathrm{ord}_p \varphi$

Dobbiamo studiare i punti $p \in \pi^{-1}(\{(1:0)\})$.
Consideriamo allora l'altra carta locale:

$$U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^2_{u,v} \qquad u = \frac{z_1}{z_0},\ v = \frac{z_2}{z_0}$$

$X_0 := X \cap U_0$

$X_0 = V(g) \qquad g(u,v) = F(1,u,v)$

$$\pi_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(u,v) \longmapsto v = \frac{z_2}{z_0}$$

Ci interessano i punti in $\pi_0^{-1}(0)$.

Sia $\varphi \in \mathcal{O}(X_0)$ data dal polinomio $\frac{\partial g}{\partial u}$.

Allora $\forall p \in X_0$:

$$\mathrm{mult}_p \pi = \mathrm{mult}_p \pi_0 = 1 + \mathrm{ord}_p \varphi.$$

Osserviamo che φ e ψ sono funzioni meromorfe in X. Vediamo che relazione c'è tra loro. Abbiamo:

$$f(x,y) = F(x,y,1) \qquad g(u,v) = F(1,u,v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z_1}(x,y,1) \qquad \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial z_1}(1,u,v)$$

Il cambiamento di coordinate in $\mathbb{P}^2$ tra U_0 e U_2 è dato da:

$$x = \frac{z_0}{z_2} = \frac{1}{v} \qquad y = \frac{z_1}{z_2} = \frac{u}{v}$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(u,v) = \varphi\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z_1}}_{\text{polinomio omog. di grado } d-1}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}, 1\right) = \frac{1}{v^{d-1}} \frac{\partial F}{\partial z_1}(1,u,v) =$$

$$= \frac{1}{v^{d-1}} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{v^{d-1}} \psi(u,v)$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\tilde{\varphi} = \frac{1}{v^{d-1}} \cdot \psi}_{\text{relazione tra funzioni meromorfe in } X} \quad \psi \text{ regolare in } p \qquad p \in \pi^{-1}(\{(1:0)\}) \in X.$$

$\pi_0 = v = \dfrac{z_2}{z_0}$ è regolare e nulla in P_{11} $(1:*:0)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{ord}_p \varphi = \underbrace{\mathrm{ord}_p \psi}_{} - (d-1)\,\mathrm{ord}_p \pi_0 = \mathrm{mult}_p \pi - 1 - (d-1)\,\mathrm{mult}_p \pi.}$$

$$\Rightarrow r = \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p \pi - 1) =$$

$$= \sum_{p \in X_2} (\mathrm{mult}_p \pi - 1) + \sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} (\mathrm{mult}_p \pi - 1)$$

$$= \sum_{p \in X_2} \mathrm{ord}_p \varphi + \sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} \left(\mathrm{ord}_p \varphi + (d-1)\, \mathrm{mult}_p \pi \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p \varphi}_{=\, 0} + (d-1) \underbrace{\sum_{p \in \pi^{-1}((1:0))} \mathrm{mult}_p \pi}_{=\, \deg \pi = d} =$$

$$= d(d-1).$$

$$\Rightarrow 2g(X) - 2 = -2d + d(d-1)$$

$$\ldots\ldots \qquad g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

<u>Note:</u> $d = 1 \Rightarrow X$ retta, $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad g = 0$

$d = 2 \Rightarrow X$ conica non sing

$X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad g = 0$

$d = 3$: $\quad g(X) = 1$.