Vedremo che:

$\forall X$ superficie di Riemann cpta

se $g(X)=0 \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

se $g(X)=1 \Rightarrow X \cong$ toro complesso

e $X \cong$ cubica piana non sing. in $\mathbb{P}^2$

Mappe tra tori complessi (dim. 1)

Oss 1 Sia $X = \dfrac{\mathbb{C}}{L}$ $\quad L$ reticolo di $\mathbb{C}$

$\forall x_0 \in X$ possiamo considerare la traslazione

$$T_{x_0} : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto x + x_0$$

· T_{x_0} è biunivoca

Sia $a \in \mathbb{C}$ t.c. $\pi(a) = x_0$ $\qquad \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} X$

Allora abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "T_{x_0}"'] & X
\end{tikzcd} \qquad z \longmapsto z + a$$

(c) $z \longmapsto z + a$ è olomorfa su $\mathbb{C}$

$\Rightarrow T_{x_0}$ è olomorfa, con inversa T_{-x_0} olomorfa

$\Rightarrow T_{x_0}$ è un biolomorfismo $X \to X$.

Oss. 2 Siano $X = \dfrac{\mathbb{C}}{L}$, $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$ due tori complessi.

Supponiamo che esista $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (non nulla) $\mathbb{C}$-lineare t.c. $f(L) \subseteq M$.

cioè: $\exists\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c. $\gamma \cdot L \subseteq M$

$(f(z) = \gamma \cdot z)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

f passa al quoziente

- F è olomorfa perché lo è f
- F è omom. di gruppi
- F è suriettiva e non ramifica
  $\Rightarrow$ è un rivestimento topologico.

Esercizio Mostrare che il grado di F è l'indice di $\gamma \cdot L$ in M.
"$= f(L)$"

Prop Siano $X = \dfrac{\mathbb{C}}{L}$, $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$ due tori complessi e $F: X \to Y$ mappa olomorfa non costante. Allora F è ~~la~~ una composizione:

$$\underbrace{X \xrightarrow{\tilde{F}} Y}_{\substack{\text{indotta}\\ \text{da mappa}\\ \text{lineare } \mathbb{C}\to\mathbb{C}}} \xrightarrow[\text{traslazione}]{} Y$$

come segue

Dim. A meno di comporre con una traslazione in Y, possiamo supporre $F(0)=0$. Proviamo che allora F è indotta da una mappa lineare $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- dalla formula di Hurwitz: F è un rivestimento topologico

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X \arrow[r, "F"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $F \circ \pi_X : \mathbb{C} \to Y$ è un rivestim. top.

- $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso

$\rightsquigarrow$ $F \circ \pi_X$ è un rivestimento universale di Y

ma anche $\pi_Y : \mathbb{C} \to Y$ è un riv. univ.

e il rivestimento universale è unico a meno di omeom.

$\Rightarrow \exists\, f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ omeomorfismo

t.c.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

- $F(0)=0 \Rightarrow f(0) \in M \Rightarrow$ a meno di comporre f con la traslazione per $-f(0)$, possiamo supporre che $f(0)=0$.

Vogliamo mostrare che f è lineare.

- F olomorfa $\Rightarrow f$ olomorfa
- $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \ell \in L \quad \exists\, \omega(z,\ell) \in M$

t.c. $f(z+\ell) = f(z) + \omega(z,\ell)$

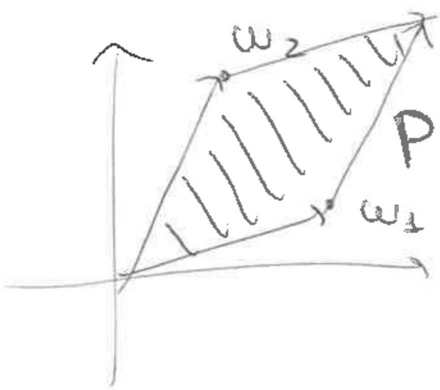
Per ℓ fissato consideriamo l'applicazione
$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z+\ell) - f(z) \end{aligned}$$

- è continua e ha immagine in M discreto $\Rightarrow$ è costante $\Rightarrow \omega(z, \ell) = \omega(\ell) \in M$

$$\Rightarrow f(z+\ell) = f(z) + \omega(\ell) \quad \begin{matrix} \forall z \in \mathbb{C} \\ \forall \ell \in L \end{matrix}$$

Deriviamo rispetto a z:
$$f'(z+\ell) = f'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \ell \in L$$

$\Rightarrow f'$ è periodica (invariante) per l'azione di L su $\mathbb{C}$



w_1, w_2 generatori di L

$\Rightarrow$ se P (compatto) è $\subset$ un parallelogramma fondamentale per L,

allora $f'(\mathbb{C}) = f'(P)$

$\Rightarrow f'$ è limitata $\Rightarrow f'$ è costante per Liouville

$\Rightarrow f(z) = \gamma z$. ■

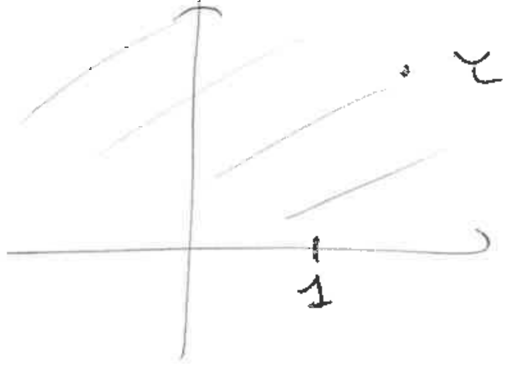
<u>OSS</u> Teo particolare: $X \cong Y$

$\Longleftrightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c. $\gamma \cdot L = M$.

<u>Isomorfismi tra tori complessi.</u>

Sia $\tau \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Im} \tau > 0$

cioè $\tau \in \mathbb{H}$ semipiano superiore



- 1 e τ sono sempre lin. indip. su $\mathbb{R}$

Sia $L_\tau \subset \mathbb{C}$ il reticolo generato da 1 e τ.

e $X_\tau := \dfrac{\mathbb{C}}{L_\tau}$.

Mostriamo che ogni toro complesso è isomorfo a X_τ per qualche $\tau \in \mathbb{H}$.

Infatti: ho $Y = \dfrac{\mathbb{C}}{M}$

M generato da ω_1, ω_2

Sia $\gamma := \dfrac{1}{\omega_1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

allora la moltiplicazione per γ in $\mathbb{C}$ porta:

$$\omega_1 \longmapsto 1$$

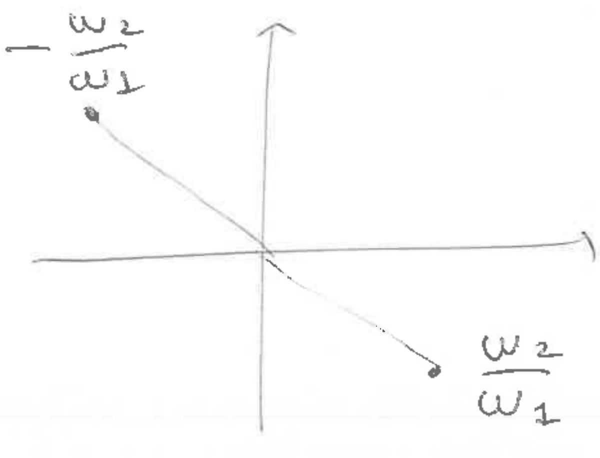
$$\omega_2 \longmapsto \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$\Rightarrow Y \cong \dfrac{\mathbb{C}}{M'}$ $\quad M'$ = reticolo generato da 1 e $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.

- $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\, \dfrac{\omega_2}{\omega_1} \neq 0$

- Se $\mathrm{Im}\, \dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0$: $M' = L_\tau$ con $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$

- Se $\mathrm{Im}\, \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < 0$: allora



$-\dfrac{\omega_2}{\omega_1} =: \tau$ ha $\mathrm{Im}\, \tau > 0$

e 1 e τ generano ancora M'

$\Rightarrow M' = L_\tau$.

$\Rightarrow Y \cong X_\tau$.

~> per studiare le classi di isom. di tori complessi, bisogna capire: (10)

dati $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ quando $X_\tau \cong X_{\tau'}$?

Prop. $X_\tau \cong X_{\tau'}$

$\iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ t.c.

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $X_\tau \cong X_{\tau'} \iff \exists \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c.

$\underbrace{\gamma \cdot L_\tau}_{\text{reticolo generato da } \gamma,\ \gamma\cdot\tau} = L_{\tau'}$] gruppo ab. gen. da 1 e τ'

$\iff \gamma, \gamma\cdot\tau \in L_{\tau'}$ e lo generano come gruppo

La condizione $\gamma, \gamma\tau \in L_{\tau'}$ diventa:

$$\gamma = c\tau' + d$$
$$\gamma\cdot\tau = a\tau' + b$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\rightsquigarrow \tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$$

Inoltre: γ e $\gamma\cdot\tau$ generano $L_{\tau'}$

$\iff$ anche 1 e τ' si possono ricavare in funzione di γ e $\gamma\cdot\tau$ $\iff$ la matrice

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è invertibile in $\mathbb{Z}$.

$\iff \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm 1$. (invertibile in $\mathbb{Z}$).

Esercizio: Mostrare che se
$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$$
con $\operatorname{Im} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau' > 0$

allora $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0$

$\rightsquigarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1$.

Esercizio Mostrare che
$$\tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau'$$
definisce un'azione del gruppo $SL_2(\mathbb{Z})$ sul semipiano superiore $\mathbb{H}$.

$\rightsquigarrow$ le orbite sono in corr. biunivoca con le classi di isom. di tori complessi di dim. 1.

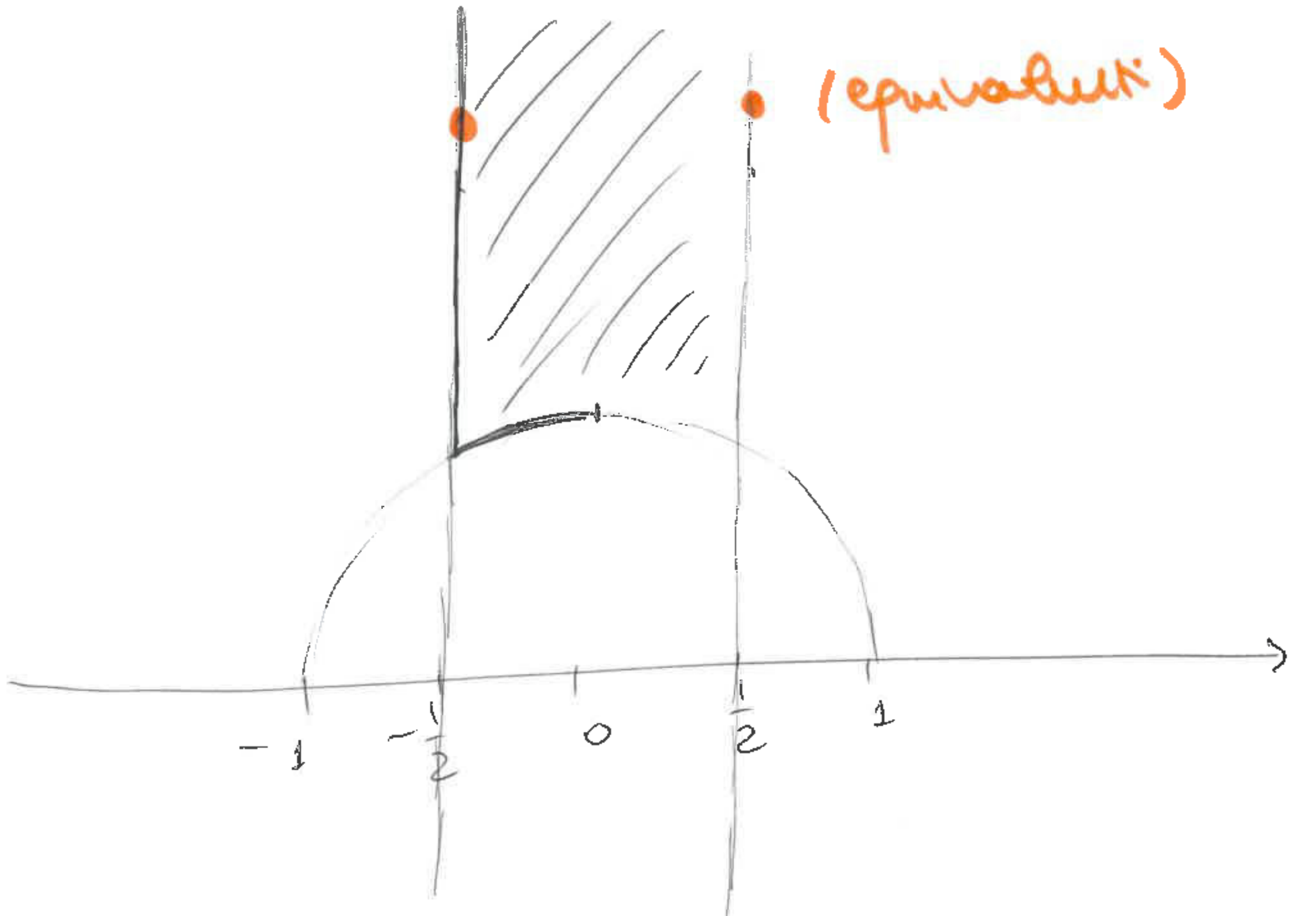
- $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ dà:
$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ dà:

$$\tau' = \tau + 1$$

$$\rightsquigarrow \tau' = \tau + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Questi due elementi generano $SL_2(\mathbb{Z})$.
Si può dimostrare che le orbite sono in corr. 1 : 1 con la regione:



$\rightsquigarrow$ ci sono ∞ tori complessi non isomorfi (ma saranno tutti omeomorfi e diffeomorfi tra loro).

DIVISORI

ES: $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\qquad \mathcal{M}(X) \cong \mathbb{C}(t)$

$\rightsquigarrow$ ha dim. infinita come spazio vet. su $\mathbb{C}$.

invece: noi vogliamo lavorare con sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}(X)$ che siano di dim. finita.

Tali sottospazi saranno definiti imponendo condizioni su zeri / poli di f

Queste condizioni vengono formalizzate dai divisori.

Sia X superficie di Riemann.

$\mathbb{Z}^X :=$ gruppo abeliano delle funzioni $X \to \mathbb{Z}$ con la somma puntuale.

Se $D \in \mathbb{Z}^X$, il SUPPORTO di D è

$$\operatorname{supp} D = \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

<u>Def</u> Un DIVISORE su X è una funzione $D : X \to \mathbb{Z}$ t.c. $\operatorname{supp} D$ sia un sottoinsieme discreto di X.

- I divisori formano un sottogruppo di $\mathbb{Z}^X$, denotato con $\operatorname{Div}(X)$. (gruppo abeliano)

Se X è compatta: i divisori sono le funzioni $D: X \to \mathbb{Z}$ con supporto finito
(⇝ $\mathrm{Div}(X)$ è il gruppo abeliano libero sull'insieme X).

Scriveremo D come una somma formale di punti:

$$D = \sum_{p \in X} \underbrace{D(p)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot p .$$

<u>Def.</u> Sia X compatta e $D \in \mathrm{Div}(X)$. Il GRADO di D è la somma dei valori di D:

$$\deg D := \sum_{p \in X} D(p) \in \mathbb{Z}$$

⇝ il grado definisce un omo di gruppi suriettivo:

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} .$$

<u>Def.</u> Sia X una sup. di Riemann e $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$. Il DIVISORE di f è:

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{p \in X} (\mathrm{ord}_p f) \cdot p .$$

(divisore degli zeri e dei poli di f)

I divisori di questo tipo si dicono DIVISORI PRINCIPALI.

Note: Se $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$

allora

$$\mathrm{div}(f \cdot g) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{div} : \underbrace{\mathcal{M}(X) \setminus \{0\}}_{\text{gruppo moltiplicativo del campo } \mathcal{M}(X)} \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$$

è omom. di gruppi, e i divisori principali $\mathrm{PDiv}(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$ formano un sottogruppo di $\mathrm{Div}(X)$.

ES. $X = \mathbb{C}_\infty$

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) \setminus \{0\}$ $\quad f = a \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{e_i}$

con: $\lambda_i \in \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$e_i \in \mathbb{Z}$

- f è olomorfa e $\neq 0$ su $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$
- $\mathrm{ord}_{\lambda_i} f = e_i$
- $\mathrm{ord}_\infty f = -\sum_{i=1}^{n} e_i$ (verificare per esercizio)

$$\rightarrow \mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i - \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \infty .$$

$\boxed{\text{SOMMA FORMALE}}$

punti di X

coeff. in $\mathbb{Z}$

Esercizio Sia $X = \{y^2 = x^5 - x\} \subset \mathbb{C}^2$

1) Mostra che X è una sup. di R.
2) Scrivi $\operatorname{div}(x)$ e $\operatorname{div}(y)$.

<u>Def.</u> Due divisori D_1, D_2 si dicono LINEARMENTE EQUIVALENTI se $D_1 - D_2$ è un divisore principale.

<u>Prop. 1</u> L'equivalenza lineare è una relazione di equivalenza nell'insieme $\operatorname{Div}(X)$, le cui classi di equivalenza sono i laterali di $\operatorname{PDiv}(X)$ in $\operatorname{Div}(X)$.

dim. per esercizio.

<u>Def</u> $$\operatorname{Pic}(X) := \frac{\operatorname{Div}(X)}{\operatorname{PDiv}(X)}$$ si dice GRUPPO DI PICARD di X

- è un gruppo abeliano
- i suoi elementi sono classi di equivalenza lineare di divisori.

<u>Prop. 2</u> Sia X compatta. Allora $\forall f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ si ha:
$$\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$$
e divisori linearmente equivalenti hanno

lo stesso grado.

$\Rightarrow$ Il grado passa al quoziente e definisce un omomorfismo

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[D] \longmapsto \deg D$$

GEOMETRIA SUPERIORE 27/4/2022

Prop X compatta ①

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Allora: $\deg$ è isomorfismo $\Longleftrightarrow$ $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

DIM. ($\Leftarrow$) Sia D un divisore di grado zero su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}_\infty$:

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$

dove: $\lambda_i, \infty \in \mathbb{C}_\infty$

$e_i, e_0 \in \mathbb{Z}$

$$0 = \deg D = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_0.$$

Sia $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i}$.

Allora $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ e $\mathrm{div}(f) = D$

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \deg : \mathrm{Pic}(\mathbb{C}_\infty) \to \mathbb{Z}$ è iniettivo

$\Downarrow$

è iso.

($\Rightarrow$) Siano $p, q \in X$ distinti e consideriamo $D = p - q$. Allora $\deg D = 1-1$.

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X) \setminus 0$ t.c. $\mathrm{div}(f) = p - q$.