GEOMETRIA SUPERIORE 27/4/2022

Prop X compatta (1)

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

Allora: $\deg$ è isomorfismo $\Longleftrightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$\boxed{\text{DIM.}}$ ($\Leftarrow$) Sia D un divisore di grado zero su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}_\infty$:

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$

dove: $\lambda_i, \infty \in \mathbb{C}_\infty$

$e_i, e_0 \in \mathbb{Z}$

$$0 = \deg D = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_0.$$

Sia $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i}$.

Allora $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ e $\mathrm{div}(f) = D$

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \deg : \mathrm{Pic}(\mathbb{C}_\infty) \to \mathbb{Z}$ è iniettivo

$\Downarrow$

è isom.

($\Rightarrow$) Siano $p, q \in X$ distinti e consideriamo $D = p - q$. Allora $\deg D = 1-1$.

$\Rightarrow D$ è principale $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ t.c. $\mathrm{div}(f) = p - q$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(X \setminus \{q\})$ e f ha un polo semplice in q

$\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ infatti la mappa $F: X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ associata a f ha grado 1.

<u>OSS</u> Abbiamo mostrato che:

1) su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ due punti sono sempre lin. equiv.

2) su X cpta, se esistono due punti (distinti) lin. equiv., allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

<u>OSS</u> Si può vedere che in generale se X è cpta di genere g:

$$\deg : \operatorname{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \qquad \operatorname{Pic}^\circ(X) \subseteq$$

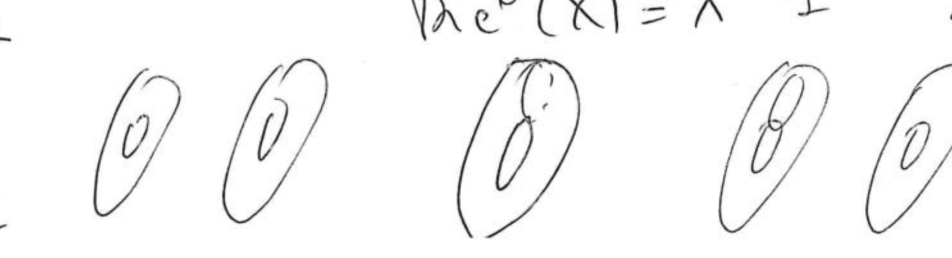
$$\operatorname{Pic}^\circ(X) := \ker \deg .$$

(classi di equiv. lineare di divisori con grado zero)

- $\operatorname{Pic}^\circ(X)$ è sempre un <u>toro complesso proiettivo</u> di dimensione g

<u>ES</u> se $g=1$ $\quad \operatorname{Pic}^\circ(X) \cong X$ $\quad$ 1 $\quad$ 2

X toro complesso di dim. 1



Esercizi da Miranda:

C p. 145.

Sia X la cubica proiettiva piana di equazione: $y^2z = x^3 - xz^2$

$(x:y:z)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Siano:

$p_0 = (0:1:0)$ $\quad p_1 = (0:0:1)$ $\quad p_2 = (1:0:1)$

$p_3 = (-1:0:1)$

equivalenza lineare

Mostrare che: $2p_0 \sim 2p_i \quad \forall i$

e che: $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

<u>Def</u> Un divisore D è EFFETTIVO $(D \geq 0)$

se $D(p) \geq 0 \quad \forall p \in X$

e diciamo che $D > 0$ se $D \geq 0$ e $D \neq 0$.

Allo stesso modo diremo che:

$D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2 \geq 0$

$D_1 > D_2$ se $D_1 - D_2 > 0$

$\rightsquigarrow$ relazione d'ordine parziale sui divisori.

<u>OSS</u> 1) Se X è compatta, si ha:

$D \geq 0 \implies \deg D \geq 0$

$D > 0 \implies \deg D > 0$

2) Ogni D si scrive in modo unico come $D = P - N$

con: $P \geq 0$
$N \geq 0$
e $(\mathrm{Supp}\, P) \cap (\mathrm{Supp}\, N) = \emptyset$.

<u>ES:</u>

$$\mathrm{div}(f) = \underbrace{\sum_{\mathrm{ord}_p f > 0} \mathrm{ord}_p f \cdot p}_{\text{divisore degli zeri di } f} - \underbrace{\sum_{\mathrm{ord}_p f < 0} |\mathrm{ord}_p f| \cdot p}_{\text{divisore dei poli di } f}.$$

Fasci associati a un divisore.

Vogliamo associare a ogni divisore D un fascio $\mathcal{O}_X(D)$

che sarà un sottofascio del fascio $\mathcal{M}_X$ delle funzioni meromorfe.

Se $U \subseteq X$ è un aperto:

denotiamo con $D_{|U}$ la restrizione di D a U

cioè $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ a supporto discreto

$D_{|U} : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ ancora a supp. discr.

Definiamo:

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{ f \in \mathcal{M}_X(U) \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(f) + D_{|U} \geq 0 \} \cup \{0\}$$

$$= \{ f \in \mathcal{M}_X(U) \setminus \{0\} \mid \mathrm{ord}_p f \geq -D(p) \ \forall p \in U \} \cup \{0\}.$$

<u>Cosa significa:</u>

Se $p \notin \mathrm{supp}\, D_{|U}$ (cioè $D(p)=0$): $\mathrm{ord}_p f \geq 0$
cioè: f olomorfa in p
$\rightsquigarrow f \in \mathcal{O}(U \setminus \mathrm{supp}\, D_{|U})$

Se $D(p) < 0$: $\mathrm{ord}_p f \geq |D(p)| > 0$
$\rightsquigarrow f$ è olomorfa in p e ha in p uno zero <u>almeno</u> di ordine $|D(p)|$

Se $D(p) > 0$: f può avere in p un polo di ordine $D(p)$.

<u>Esercizio importante:</u>

Mostrare che:

1) $\mathcal{O}_X(D)(U)$ è un sottospazio vettoriale complesso di $\mathcal{M}_X(U)$ $\left(\mathrm{ord}_p(f+g) \geq \min(\mathrm{ord}_p f, \mathrm{or}\ldots\right)$

2) $\mathcal{O}_X(D)(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-sottomodulo di $\mathcal{M}_X(U)$

3) $\mathcal{O}_X(D)$ è un sottofascio di $\mathcal{M}_X$.

<u>ES:</u> Se $D=0$, allora $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$

<u>Es.</u> Sia $D_1 \leq D_2$. Allora:

$$D_1(p) \leq D_2(p) \quad \forall p \in X$$

$$\Rightarrow -D_1(p) \geq -D_2(p) \quad \forall p \in X$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \subseteq \mathcal{O}_X(D_2).$$

<u>Es.</u> Se $D \geq 0$ (D effettivo), allora

$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(D).$$

<u>Lemma</u>. Sia X una cpta e D un divisore su X con $\deg D < 0$. Allora:

$$\underbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X(D))}_{\mathcal{O}_X(D)(X)} = \{0\}.$$

DIM. Se $\exists f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, $f \neq 0$, allora

$$\operatorname{div}(f) + D \geq 0$$

$$\Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f) + D) \geq 0$$

$$\deg(\operatorname{div}(f) + D) = \deg \operatorname{div}(f) + \deg D = \deg D.$$

■

<u>Fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli</u>.

Sia X una superficie di Riemann (o varietà complessa)

<u>Def</u> Un FASCIO DI $\mathcal{O}_X$-MODULI su X è un fascio $\mathcal{G}$ t.c. $\forall U \subseteq X$ aperto

$\mathcal{F}(U)$ è un modulo nell'anello $\mathcal{O}_X(U)$ (7)

e t.c. se $V \subseteq U$ aperto e $s \in \mathcal{F}(U)$, $f \in \mathcal{O}(U)$

allora $(f \cdot s)_{|V} = f_{|V} \cdot s_{|V}$

ES: Il fascio $\mathcal{M}_X$ delle funzioni meromorfe è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli

ES: $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{M}_X$

↳ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Prop Se D_1 e D_2 sono divisori linearm. equiv. su X, allora $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ come fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli. $\boxed{D_1 = D_2 + \operatorname{div} h}$

Più precisamente:

se $D_1 - D_2 = \operatorname{div}(h)$ $h \in \mathcal{M}(X)$ allora l'isomorfismo è dato da:

$$\mathcal{O}_X(D_1)(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_2)(U)$$
$$f \longmapsto f \cdot h_{|U}$$

DIM. $\operatorname{div}(f) + D_{1|U} \geq 0$ per ip

~~$\operatorname{div}(f \cdot h_{|U}) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(h)_{|U}$~~

~~$\geq D_{1|U} + \operatorname{div}(h)_{|U}$~~

$\operatorname{div}(f) + D_{2|U} + \operatorname{div}(h)_{|U} \geq 0$

$\operatorname{div}(f \cdot h_{|U}) + D_{2|U}$

$\Rightarrow f \cdot h_{|U} \in \mathcal{O}_X(D_2)(U)$

$\rightsquigarrow$ l'applicazione è ben definita, è omo di $\mathcal{O}_X(U)$-moduli, e definisce un morfismo di fasci

$$\mu_h : \mathcal{O}_X(D_1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_2).$$

Allo stesso modo abbiamo

$$D_2 = D_1 - \operatorname{div}(h) = D_1 + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\mu_{\frac{1}{h}} : \mathcal{O}_X(D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_1)$$

inversa di μ_h.

<u>Prop</u> Sia D un divisore su $\mathbb{C}_\infty$ con $d := \deg D \geq 0$.

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + e_0 \infty$$

con: $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\infty \in \mathbb{C}_\infty$

$e_i \in \mathbb{Z}$, $d = \sum_{i=1}^{n} e_i + e_0 \geq 0$.

Consideriamo la funzione

$$f := \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{-e_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$$

Allora

$H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \{ g(z) \cdot f(z) \mid g \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $\leq d = \deg D \}$.

DIM

$$\mathrm{ord}_{\lambda_i} f = -e_i$$

$$\mathrm{ord}_\infty f = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ord}_{\lambda_i} f = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(f) = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_i + \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\infty$$

$$\Rightarrow D + \mathrm{div}(f) = d\,\infty = (\deg D)\cdot\infty .$$

$\boxed{\supseteq}$ Se g è un polinomio di grado $\leq d$

$$\mathrm{ord}_\infty g = -\deg g \geq -d$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(g) = \left(\begin{array}{c}\text{divisore degli}\\ \text{zeri di } g \text{ in } \mathbb{C}\end{array}\right) - (\deg g)\cdot\infty$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(f\cdot g) + D = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g) + D$$

$$= \cancel{(\deg D)\cdot\infty}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{divisore degli zeri}\\ \text{di } g \text{ in } \mathbb{C}\end{array}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(\deg D - \deg g)}_{\geq 0}\cdot\infty$$

$$\Rightarrow g\cdot f \in H^0(X, \mathcal{O}(D)).$$

$\boxed{\subseteq}$ Sia $h \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$ non nulla.

Sia $g := \frac{h}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$.

Allora

$$\mathrm{div}(g) = \mathrm{div}(h) - \mathrm{div}(f) \geq -D - \mathrm{div}(f)$$
$$= -d\cdot\infty$$

$\Rightarrow g$ non ha poli su $\mathbb{C}$, ovvero è un polinom e g ha un polo di ordine al più d all'∞ (10)

$\Rightarrow \deg g \leq d$.

<u>Notazione</u>: sapendo $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ ha dimensione finita (come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale), denotiamo la sua dimensione con $h^0(X, \mathcal{O}(D))$.

<u>Coroll.</u> Sia D un divisore su $\mathbb{C}_\infty$. ~~Allora~~ $H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita e

$$h^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \begin{cases} 0 & \deg D < 0 \\ 1 + \deg D & \deg D \geq 0. \end{cases}$$

Sia X cpta e fissiamo: $p \in X$

D un divisore su X

e una coordinata locale z_p in p

$$\left(\begin{array}{l} z_p : U_p \to \mathbb{C} \text{ carta locale} \\ z_p(p) = 0 \end{array} \right.$$

Consideriamo il fascio grattacielo $\mathbb{C}_p$ (concentrato in p).

$$\mathbb{C}_p(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } p \notin U \\ \mathbb{C} & \text{se } p \in U \end{cases}$$

Definiamo un morfismo di fasci

$$\varphi : \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

Sia $U \subseteq X$ aperto.

Se $p \notin U$: poniamo $\varphi_U = 0$.

Se $p \in U$: dobbiamo definire

$$\varphi_U : \mathcal{O}_X(D)(U) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Sia $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$, $f \neq 0$

Allora: $\mathrm{ord}_p f \geq -D(p)$

$\to$ localmente: $f = \sum_{n \geq -D(p)} a_n z_p^n$

espressione nella coord. locale (sarebbe $f \circ \varphi^{-1}$, φ carta locale, meromorfa in z_0 in $\mathbb{C}$)

$$\begin{array}{c} X \supseteq U \supseteq U_p \ni p \\ \downarrow z_p \\ \mathbb{C} \end{array}$$

f meromorfa su U

Poniamo $\varphi_U(f) := a_{-D(p)} \in \mathbb{C}$.

Allora:

- φ_U è $\mathbb{C}$-lineare
- le φ_U sono compatibili con le restrizioni e dà una

un morfismo di fasci

$$\varphi : \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

- φ dipende dalla scelta della carta locale z_p, che è fissata.
- Vediamo cos'è $\ker\varphi$.

$(\ker\varphi)(U) = \ker\varphi_U$

$p \notin U$: $\varphi_U = 0 \Rightarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D)(U)$

se $p \in U$: $\varphi_U(f) = 0 \iff a_{-D(p)} = 0$

$\iff \mathrm{ord}_p f > -D(p)$

$\iff \mathrm{ord}_p f \geq -D(p) + 1 = -(D(p) - 1)$

$\iff f \in \mathcal{O}_X(D-p)(U) \subseteq \mathcal{O}_X(D)(U)$

$\rightsquigarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D-p)(U)$.

Nota: se $p \notin U$, allora $(D-p)_{|U} = D_{|U}$

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(D-p)(U) = \mathcal{O}_X(D)(U)$

$\Rightarrow \ker\varphi_U = \mathcal{O}_X(D-p)(U)$

$$\Rightarrow \boxed{\ker\varphi = \mathcal{O}_X(D-p).}$$

$\rightsquigarrow$ abbiamo costruito una succ. esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D-p) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_p$$

Mostriamo che φ è un morfismo (13)
di fasci suriettivo.
Sia $U \subseteq X$ aperto.
Se $p \notin U$: $\varphi_U = 0$ è suriettivo ok
$$\overset{\parallel}{\mathbb{C}_p(U)}$$

Sia $p \in U$: $\varphi_U : \mathcal{O}_X(D)(U) \longrightarrow \mathbb{C}$

Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia $U_p \subseteq U$ un aperto su cui è definita la carta locale z_p e t.c. $U_p \cap \operatorname{supp} D = \{p\}$
$$\Rightarrow D_{|U_p} = D(p) \cdot p$$

Consideriamo la funzione
$$g = \lambda z_p^{-D(p)}$$

- g è meromorfa su U_p
- $\operatorname{ord}_p g = -D(p)$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{O}_X(D)(U_p)$$

e $\boxed{\varphi_{U_p}(g) = \lambda}$

$\leadsto$ φ è un morfismo di fasci suriettivo
$\Rightarrow$ abbiamo una succ. esatta corta di fasci:
$$0 \to \mathcal{O}_X(D-p) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathbb{C}_p \to 0.$$

Es. Se $D=0$ la successione diventa:

$$0 \to \underbrace{\mathcal{O}_X(-p)}_{\text{funzioni olomorfe nulle in } p} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow[\uparrow \text{ valutazione in } p]{} \mathbb{C}_p \to 0$$

Vedremo:

Prop. X spazio topologico
G gruppo abeliano
$p \in X$ $\qquad G_p$ fascio grattacielo concentrato in p con gruppo G

Si ha: $\check{H}^1(X, G_p) = 0$.

Coroll. Sia X una sup. di Riemann compatta, D un divisore, $p \in X$.
Allora otteniamo una succ. esatta di spazi vettoriali complessi:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \xhookrightarrow{i} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$$

$$\xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to 0 = H^1(X, \mathbb{C}$$

dalla Prop.

- γ suriettiva
- $\ker \alpha = H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))$

Abbiamo due possibilità:

$\alpha = 0$ oppure α suriettivo.

<u>I CASO:</u> <u>α suriettiva.</u>

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

$$\text{e} \quad \frac{H^0(X, \mathcal{O}_X(D))}{H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))} \cong \mathbb{C}.$$

Inoltre: $\beta = 0 \Rightarrow \gamma$ iniettiva

$\Rightarrow \gamma$ isomorfismo

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$$