Es. Se $D=0$ la successione diventa:

$$0 \to \underbrace{\mathcal{O}_X(-p)}_{\text{funzioni olomorfe nulle in } p} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow[\text{valutazione in } p]{} \mathbb{C}_p \to 0$$

Vedremo:

Prop. X spazio topologico
G gruppo abeliano
$p \in X$ $\qquad G_p$ fascio grattacielo concentrato in p con gruppo G

Si ha: $\check{H}^1(X, G_p) = 0$.

Coroll. Sia X una sup. di Riemann compatta, D un divisore, $p \in X$. Allora otteniamo una succ. esatta di spazi vettoriali complessi:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \overset{i}{\hookrightarrow} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$$

$$\xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \underset{\substack{\| \\ H^1(X,\mathbb{C}_p)}}{0}$$

dalla Prop.

- γ suriettiva
- $\ker \alpha = H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))$

Abbiamo due possibilità:
$\alpha = 0$ oppure α suriettivo.

I CASO: α suriettiva.

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

$$\text{e} \quad \frac{H^0(X, \mathcal{O}_X(D))}{H^0(X, \mathcal{O}_X(D-p))} \cong \mathbb{C}.$$

Inoltre: $\beta = 0 \Rightarrow \gamma$ iniettiva

$\Rightarrow \gamma$ isomorfismo

$$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D-p)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$$

Se j è t.c. $p \notin U_j$, poniamo $a_j := 0$. (2)

ma $a = \{a_i\}$ 0-cocatena del fascio $\underline{\mathbb{C}}_p$ relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$.

Mostriamo che $da = \lambda$.

Se j è t.c. $p \in U_j$:

$$(da)_{i_0 j} = a_j - a_{i_0} = \lambda_{i_0 j}$$

Se j, k sono t.c. $p \in U_{jk}$: allora

$$(da)_{jk} = a_k - a_j = \lambda_{i_0 k} - \lambda_{i_0 j} \overset{\lambda \text{ ciclo}}{=} \lambda_{jk}$$

Se $p \notin U_{jk}$, allora

$$(da)_{jk} = 0 = \lambda_{jk}$$

$\Rightarrow da = \lambda \quad \Rightarrow [\lambda] = 0$ in $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}_p)$. $\boxtimes$.

X sup. Riemann cpta

D divisore su X, $p \in X$

Abbiamo una succ. esatta di spazi vett. complessi:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}(D-p)) \to H^0(X, \mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$$

$$\xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}(D-p)) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, \mathcal{O}(D)) \to 0$$

- $\alpha = 0$ oppure α suriettiva

<u>II CASO: $\alpha = 0$</u>

$$\Rightarrow H^0(\cancel{X}, \mathcal{O}(D-p)) = H^0(X, \mathcal{O}(D))$$

- β iniettiva

$\Rightarrow \operatorname{Im}\beta \cong \mathbb{C}$ ha dimensione 1

$\quad\;\; \ker\gamma$ (con $\operatorname{Im}\beta = \ker\gamma$)

$$\Rightarrow \text{e: } \frac{H^1(X, \mathcal{O}(D-p))}{\ker\gamma} \cong H^1(X, \mathcal{O}(D))$$

<u>Coroll.</u> Siano: X sup. R. cpta, D divisore, $p \in X$. Allora:

1) $H^0(X, \mathcal{O}(D-p))$ ha dim. finita $\Leftrightarrow$ $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita

2) $H^1(X, \mathcal{O}(D-p))$ ha dim. finita $\Leftrightarrow$ $H^1(X, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita.

3) Se tutti questi spazi vett. complessi hanno dim. finita, allora:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) - h^1(\mathcal{O}_X(D-p)) + 1.$$

DIM. (1) e (2) seguono dall'analisi precedente. Per (3), dalla succ. esatta abbiamo:

$$0 = h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) - h^0(\mathcal{O}_X(D)) + 1$$
$$- h^1(\mathcal{O}_X(D-p)) + h^1(\mathcal{O}_X(D))$$ ok.

Note: • per $D=0$ $\quad \mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$

e $H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$

• se $\deg D < 0$ allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \{0\}$

Nota: sommando e sottraendo punti possiamo passare da qualsiasi D a zero.

Prop Sia X sup. Riemann cpta. Allora per ogni divisore D lo spazio vettoriale $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita. Più precisamente: se $D = P - N$ con $P \geq 0$, $N \geq 0$, $\operatorname{supp} P \cap \operatorname{supp} N = \emptyset$

allora $\boxed{h^0(\mathcal{O}_X(D)) \leq 1 + \deg P.}$

DIM. Procediamo per induzione su $\deg P$. ($\deg P \geq 0$).

Se $\deg P = 0$: allora $P = 0$

- $N = 0$ cioè $D = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$
  $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \cong \mathbb{C}$
  e vale la disuguaglianza (*)
- $N \neq 0$ allora $D = -N$
  $\Rightarrow \deg D < 0$
  $\Rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \{0\}$. ok vale la dis. (*)

Sia ora $\deg P > 0$ e sia $p \in \operatorname{supp} P$.

Allora

$$D - p = P + N - p = $$
$$= \underbrace{(P-p)}_{\geq 0} + N$$

$\deg(P-p) = \deg P - 1$

$\Rightarrow$ per ip di induzione (applicata a $D-p$)

$$h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \leq 1 + (\deg P - 1).$$
$$= \deg P.$$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) = \begin{cases} h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \\ h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) + 1 \end{cases}$$

in ogni caso

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) \leq h^0(\mathcal{O}_X(D-p)) + 1$$
$$\leq \deg P + 1.$$

Teorema. Sia X una superficie di Riemann compatta. Allora $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ha dimensione finita (su $\mathbb{C}$).

Teorema (di Riemann-Roch in forma debole). Sia X una sup. R. cpta e D un divisore su X. Allora $H^1(X, \mathcal{O}(D))$ ha dimensione finita, e si ha: $\rightarrow$ FORMULA DI RIEMANN-ROCH

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

DIGRESSIONE (Se $\mathcal{F}$ un fascio di spazi vett. su k su X sp. top.

t.c. $H^i(X, \mathcal{F})$ ha dim. finita $\forall i$

e $H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n$

si definisca la caratteristica di Eulero del fascio $\mathcal{F}$ come

$$\chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$$)

DIM. Sommando e sottraendo punti, in un numero finito di passi andiamo da D al divisore nullo

$H^1(X, \mathcal{O}_X)$ ha dim. finita

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}(D))$ ha dim. finita.

Inoltre $\forall p$ abbiamo:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(D-p)) - h^1(\mathcal{O}(D-p)) + 1.$$

Scriviamo $D = P - N$ come prima.

Sottraendo uno a uno i punti di P, otteniamo:

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = h^0(\mathcal{O}(-N)) - h^1(\mathcal{O}(-N)) + \deg P.$$

Sommando a uno a uno i punti di N, otteniamo:

$$h^0(\mathcal{O}_X(-N)) - h^1(\mathcal{O}_X(-N)) =$$

$$= h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) - \deg N.$$

$$\rightsquigarrow h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D)) = \underbrace{h^0(\mathcal{O}_X)}_{1} - h^1(\mathcal{O}_X) + \underbrace{\deg P - \deg N}_{\deg D}$$

$\blacksquare$

<u>Coroll. 1</u> Sia X una sup. di R. cpta. Per ogni divisore D su X si ha:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

<u>Coroll. 2</u> Sia X una sup. di R. cpta. Allora X ha funzioni meromorfe non costanti.

(basta prendere un divisore D con $\deg D > h^1(\mathcal{O}_X)$).

<u>Coroll. 3</u> Sia X una sup. di R cpta e $p \in X$. Allora $\exists f$ olomorfa su $X \setminus \{p\}$ e non costante.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $D := (h^1(\mathcal{O}_X) + 1) \cdot p$.

Allora $\deg D = h^1(\mathcal{O}_X) + 1$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geq 2$

$\Rightarrow \exists f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$ non costante.

Allora f è olomorfa su
$$X \setminus \operatorname{supp} D = X \setminus \{p\}.$$

Esercizi da Miranda:

<u>Es. C p. 152</u>: X cpta, D divisore di grado zero.

Mostrare che: ~~$H^0(\mathcal{O}_X(D))$~~

- se $D \sim 0$ (D principale), allora $\dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$.
- se $D \not\sim 0$, allora $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = 0$.

<u>Es. G p. 153</u>: ~~X cpta~~
Mostrare che date due funzioni meromorfe f, g su X, esiste un divisore D t.c. $f, g \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

<u>Es. H p. 153</u>: X cpta, $D > 0$ t.c.
$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + \deg D.$$
Mostrare che $\exists p \in X$ t.c. $\dim H^0(\mathcal{O}_X(p)) = 2$.
Concludere che $X \cong \mathbb{C}_\infty$.

<u>Fibrati vettoriali</u>:

1) Fibrati vettoriali complessi C^∞.

X varietà diff.

Un fibrato vettoriale complesso C^∞ E su X è

(9)

- una varietà diff. E con $\pi : E \to X$ C^∞

t.c. $\forall x \in X$

la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vett. complesso

e: $\exists \{U_\alpha\}$ ricopr. aperto di X

$$\exists \quad \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{diffeom.}} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

t.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\quad \phi_\alpha : E_x \to \mathbb{C}^r$ sia isom. di spazi vett. complessi.

$\leadsto$ il cociclo di E è

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \xrightarrow[C^\infty]{} GL(r, \mathbb{C})$$

<u>Nota</u>: se E è un fibrato vett. <u>reale</u> su X di rango r, con cociclo

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(r, \mathbb{R})$$

possiamo vedere le $\varphi_{\alpha\beta}$ anche a valori in $GL(r, \mathbb{C})$ e usarle per costruire un fibrato vett. complesso di rk r

$$E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

2) Fibrati vettoriali olomorfi.

X varietà complessa

Un fibrato vettoriale olomorfo su X è

- una varietà complessa E con $\pi : E \to X$ olomorfa

t.c. $\forall x \in X$ la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vett. complesso

ed esistono:

- un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X
- $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{biolom.}} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

t.c. $\forall x \in U_\alpha$ $\phi_\alpha : E_x \to \mathbb{C}^r$ è isom. di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

<u>Cociclo di E</u>: su $U_{\alpha\beta}$

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \arrow[rr, bend left] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \end{tikzcd}$$

$$(p, v) \longmapsto (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot v)$$

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \rightsquigarrow g_{\alpha\beta}$$

$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ <u>olomorfe</u>

Soddisfano:

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &\equiv I \\ g_{\beta\alpha} &= g_{\alpha\beta}^{-1} \\ g_{\alpha\gamma} &= g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \end{aligned}\right] \circledast$$

- Viceversa: dato $\{U_\alpha\}$ e date $\{g_{\alpha\beta}\}$ come sopra, esiste sempre un fibrato vettoriale olomorfo E su X, di rk r, che ha cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$.
- Due cocicli $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ relativi allo stesso ricoprimento $\{U_\alpha\}$ definiscono fibrati vett. isomorfi

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ olomorfe t.c. su $U_{\alpha\beta}$ si abbia

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1}\, g_{\alpha\beta}\, h_\beta .$$

- In particolare: il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ definisce un fibrato isomorfo al fibrato banale $X \times \mathbb{C}^r$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ olomorfe t.c. su $U_{\alpha\beta}$ si abbia

$$g_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} \cdot h_\beta$$

3) Fibrati lineari olomorfi e gruppo di Picard.

(rango 1 — fibrati in rette)

Sia E un fibrato ~~lineare~~ olomorfo di rk 1

Il suo cociclo è $\{g_{\alpha\beta}\}$ $\{U_\alpha\}$

$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olomorfe mai nulle

$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X(U_{\alpha\beta})$

Notazione: per ogni aperto $U \subseteq X$ varietà complessa

sia $\mathcal{O}_X^*(U) = \{ f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f$ è sempre $\neq 0 \}$.

- $\mathcal{O}_X^*(U)$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto, con elem. neutro 1

- $\mathcal{O}_X^*$ un fascio di gruppi abeliani, il fascio fascio delle funzioni olomorfe mai nulle

$\rightsquigarrow g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_{\alpha\beta})$

$\rightsquigarrow g = \{g_{\alpha\beta}\}$ che è una 1-cocatena di Čech per $\mathcal{O}_X^*$ relativa al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\} = \mathcal{U}$

le condizioni (★) di cociclo garantiscono che g è ben definita ed è un cociclo, ovvero $dg=0$. (13)

$\rightsquigarrow$ $\xi_E = [g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$

$$\downarrow$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$\rightsquigarrow$ il cociclo del fibrato lineare E permette di associare ad E una classe

$$\xi_E \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

<u>Fatto</u>

- la classe ξ_E dipende solo da E e non dalla scelta del ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e delle trivializzazioni locali $\{\phi_\alpha\}$.

<u>Fatto</u>: ogni classe in $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ viene da un fibrato lineare olomorfo E su X

(si sceglie un ricopr. $\mathcal{U}$ in cui la classe è rappr. $\Rightarrow$ si ha un cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ $\Rightarrow$ si costruisce il fibrato lineare).

- $[g] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ è nulla

$\iff$ g è un cobordo

$\iff$ $\exists\, h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ $\forall \alpha$ t.c.

su $U_{\alpha\beta}$ $g_{\alpha\beta} = \dfrac{h_\beta}{h_\alpha}$ $\iff$ $E \cong X \times \mathbb{C}$.