Divisori e fibrati lineari

Sia da X una superficie di Riemann

OSS Sia D un divisore su X.

Sia $p \in \mathrm{supp}\, D$.

Sia U_p un intorno aperto di p in X

t.c.:

1) $\exists\, z_p : U_p \to \mathbb{C}$ carta locale centrata in p

2) $U_p \cap \mathrm{supp}\, D = \{p\}$

Possiamo inoltre supporre che $U_p \cap U_q = \emptyset$ se $p, q \in \mathrm{supp}\, D$, $p \neq q$.

Allora $\cdot\ D_{|U_p} = D(p)\cdot p$ (da (2))

$\cdot\ z_p^n$ ha ordine n in p, $\forall n$

$\Rightarrow \mathrm{div}(z_p^{D(p)}) = D(p)\cdot p = D_{|U_p}$

$\Rightarrow D_{|U_p}$ è principale, $\forall p$.

Sia $U_0 := X \setminus \mathrm{supp}\, D$ aperto di X

Allora $D_{|U_0} = 0 = \mathrm{div}(1)$ principale

$\Rightarrow$ abbiamo costruito un ricoprimento aperto di X $\{U_0, U_p\}_{p \in \mathrm{supp}\, D}$

t.c. $D_{|U_0}$ e $D_{|U_p}$ è principale $\forall p$.

$\rightsquigarrow$ D è localmente principale, ma in generale non sarà un divisore principale!

<u>OSS. 2</u> Consideriamo il fascio:
$\mathcal{O}_X(D)$

Se $U \subseteq X$ è un aperto t.c. $D_{|U}$ è principale, allora:
$D_{|U} = div(f)$

$$\mathcal{O}_X(D)_{|U} = \mathcal{O}_U(D_{|U}) \simeq \mathcal{O}_U$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}_X(D)$ è un fascio invertibile.

Consideriamo il ricoprimento $\{U_0, U_p\}$ su cui D è principale.

$$D_{|U_0} = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_X(D)_{|U_0} = \mathcal{O}_{U_0}$$

Se $p \in \operatorname{supp} D$: $D_{|U_p} = div\left(z_p^{D(p)}\right)$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}_X(D)_{|U_p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_p}$

<u>è la moltiplicazione per $z_p^{D(p)}$</u>

$$D_{|U_p} = D(p) \cdot p.$$

$\rightsquigarrow$ a ogni divisore D su X sup. di Riemann associamo un fascio invertibile $\mathcal{O}_X(D)$

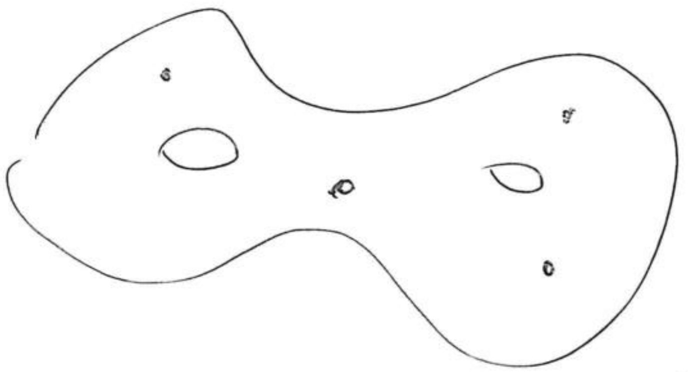
. divisori linearmente equivalenti danno fasci isomorfi

→ otteniamo un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}^*) \\ \| & & \\ \mathrm{Div}(X)\big/_{\text{equiv. lineare}} & & \\ [D] & \longmapsto & [\mathcal{O}_X(D)] \end{array}$$

pensati come fasci invertibili

Scriviamo il cociclo corrispondente a $\mathcal{O}_X(D)$, relativamente al ricoprimento $\{U_0, U_p\}_{p \in \mathrm{supp}\, D}$.



$U_0 = X \setminus \mathrm{supp}\, D$

Le coppie che hanno int. non $\emptyset$ sono solo: $U_{0p} = U_0 \cap U_p = U_p \setminus \{p\}$

$\mathcal{O}_X(D)_{|U_p \setminus \{p\}}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{U_p \setminus \{p\}}$ in 2 modi

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X(D)_{|U_p\setminus\{p\}} \arrow[dl, "U_0"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{O}_{U_p\setminus\{p\}} & & \mathcal{O}_{U_p\setminus\{p\}} \end{tikzcd}$$

$f \mapsto f \cdot z_p^{D(p)}$

$$1 \longmapsto z_p^{D(p)}$$

$h_{0p} = z_p^{D(p)}$ cociclo $\in \mathcal{O}^*(U_p \setminus \{p\})$.

<u>Oss</u> Dati due divisori D_1, D_2
con cocicli $\{g_{op}\}, \{h_{op}\}$

allora
$$g_{op} \cdot h_{op} = z_p^{D_1(p)} \cdot z_p^{D_2(p)} = $$
$$= z_p^{(D_1+D_2)(p)}$$
⇝ il prodotto è il cociclo di $D_1 + D_2$.
⇝ la mappa
$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$$
è anche omom. di gruppi.

<u>Fatto</u>: <u>è un isomorfismo di gruppi.</u>

⇝ per una superficie di Riemann
abbiamo 4 gruppi isomorfi

$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X) / $ equiv lineare,

$H^1(X, \mathcal{O}^*)$, fibrati lin., fasci invertibili.

<u>Es.</u> $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\quad \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$ tramite il grado

$p = (0:1)$ $\quad (z_0 : z_1)$

$D = dp$ $\quad d \in \mathbb{Z}$ divisore di grado d.

$U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{p\}$

$$D_{|U_0} = 0$$

$U_1 = \{z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}_z$ $\quad p \longleftrightarrow$ origine
$z = \frac{z_0}{z_1}$ $\quad D_{|U_1} = \mathrm{div}(z^d)$

$= \operatorname{div}\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d$ (15)

$\rightsquigarrow$ su U_{01} il cociclo corr. a $\mathcal{O}(D)$ è

$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d \in \mathcal{O}^*(U_{01})$$

Esercizi da svolgere:

- es. I p. 153
- es. A, C, D p. 330
- es. J, N p. 344

} vedere su moodle x testo

ES. Fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$$

punti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{1:1}$ rette vettoriali in $\mathbb{C}^2$

$\exists\ L \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ fibrato vett. di rk 1

t.c. $\forall p \in \mathbb{P}^1$

$L_p \subset \mathbb{C}^2$ è la retta vettoriale corrispondente a p.

$$L \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$\| $$

$$\{(v, p) \mid \cancel{p \in L} \; v \in L_p\}$$

Siano: x, y coord. su $\mathbb{C}^2$

$(s:t)$ " " $\mathbb{P}^1$

$L_p = \mathcal{L}(s,t)$ $\quad (x,y) \in L_p$

$\Leftrightarrow$ (x,y) e (s,t) sono proporzionali

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ s & t \end{vmatrix} = 0$ cioè $xt - ys = 0$.

equazione di L in $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$

$\pi : L \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ proiezione da $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ (2)

Esercizio Verificare che L è una varietà complessa di dim. 2.

π è banale

Sia $U := \{ s \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^1$
$\quad = \mathbb{C}_{\frac{t}{s}} \qquad T = \frac{t}{s}$

$$\pi^{-1}(U) = L_U \subset \mathbb{C}^2 \times U = \mathbb{C}^3_{x,y,T}$$

In $\mathbb{C}^3$ l'equazione di L diventa:

$$xT - y = 0$$
$$y = xT \qquad \lambda \quad (s,t)$$

$$\Rightarrow L_U \cong \mathbb{C}^2_{x,T} \cong \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_T$$
$$\downarrow \pi$$
$$U = \mathbb{C}_T$$

$\rightsquigarrow L$ è banale su U.

Sia $V := \{ t \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^1$
$\quad = \mathbb{C}_{\frac{s}{t}} \qquad S = \frac{s}{t}$

$$L_V = \pi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^2 \times V = \mathbb{C}^3_{x,y,S}$$

l'equazione di L diventa: $x = yS$

$$\Rightarrow L_V \cong \mathbb{C}^2_{y,S} \cong \mathbb{C}_y \times \mathbb{C}_S$$
$$\downarrow \pi$$
$$V = \mathbb{C}_S.$$

$\Rightarrow$ L è un fibrato lineare olomorfo (3)
su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con ricoprimento minimale banalizzante

$\{U, V\}$.

Scriviamo la transizione:

$$\begin{tikzcd}
 & (x=\lambda,\ y=\lambda\frac{t}{s},\ (s:t)) \in \Pi^{-1}(U\cap V) \arrow[dl, "\phi_U"', "\wr"] \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_V", "\wr"'] & \\
(U\cap V)\times\mathbb{C} \arrow[rr, bend right] & U\cap V & (U\cap V)\times\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$((s:t), \lambda)$ $\qquad\qquad$ $\left((s:t), \lambda\cdot\frac{t}{s}\right)$

$\left(\frac{s}{t}\right)^{-1}$ $\qquad$ (y)

$s\neq 0, t\neq 0$

$T = \frac{t}{s}$

$\Rightarrow g_{UV}(s:t) = \frac{t}{s}$ transizione

$U \leftrightarrow U_0$

$V \leftrightarrow U_1$

grado d: $g_{01} = \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{L \text{ ha grado } -1}$

$\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{Z}$

$L \longleftrightarrow -1$

<u>OSS</u> Sia X una superficie di Riemann compatta.

La mappa $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$

$f(z) \longmapsto e^{2\pi i f(z)}$

Gli autospazi sono costanti

$$\mathcal{L}(1, \pm i)$$

$\leadsto$ se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$, si ha:

$$M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ la funzione costante in M

$$\psi : X \to GL(2, \mathbb{C})$$

dà un nuovo cociclo per il fibrato tg complessificato

$$\tilde{J} : U \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

$$\tilde{J}(z) = \begin{bmatrix} h'(z) & 0 \\ 0 & \overline{h'(z)} \end{bmatrix}$$

cociclo di $T^{0,1}$

Cociclo del Tang. olom $T^{1,0}$.

ES. $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Φ $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ fibrato tg olomorfo

$(z_0 : z_1)$

$U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ coordinate: $z = \frac{z_1}{z_0}$

$U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ coordinate: $t = \frac{z_0}{z_1}$

Cambiamento di coordinate: $t = h(z) = \frac{1}{z}$

$\rightsquigarrow$ il cociclo di $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ su U_{01} è dato da

$$h'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

$$g_{01} = -\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^{+2}$$

Note: $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ è un fibrato lineare olomorfo $\rightsquigarrow$ tramite il cociclo, corrisponde a un elemento di $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$
$\cong \mathbb{Z}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\deg \mathcal{T}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} = +2}$$

1-forme olomorfe su superfici di Riemann.

X sup. di Riemann

$\mathcal{T}_X$ fibrato tg olomorfo $\rightsquigarrow$ fibrato lineare olom.

$\mathcal{T}_X^*$ fibrato cotangente olomorfo (fibrato lineare olom.).

- le 1-forme olomorfe su X sono le sezioni olomorfe di $\mathcal{T}_X^*$.

$$T_{\mathbb{C}} X = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

$$\rightsquigarrow (T_{\mathbb{C}} X)^* = (T^{1,0})^* \oplus (T^{0,1})^*$$

$\hookrightarrow$ le sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di $(T_{\mathbb{C}} X)^*$ sono

Le 1-forme diff. C^∞, ma a coeff. complessi?

in coord. locali x, y

$$\omega = f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy$$

$$f, g : U \to \mathbb{C} \quad C^\infty.$$

(U dominio della carta locale).

dx, dy base duale di $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

Definiamo:

$$\left.\begin{aligned} dz &:= dx + i\,dy \\ d\bar{z} &:= dx - i\,dy \end{aligned}\right\} \text{ 1-forme } C^\infty \text{ su } U$$

$dz, d\bar{z}$ base duale di $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

(verificare per esercizio)

$\rightsquigarrow (T^{1,0})^*$ ~~base~~ ha per base dz

$(T^{0,1})^*$ " " " $d\bar{z}$

$\| \; \Omega^*_X$

$\rightsquigarrow$ in U una 1-forma olomorfa si scrive come $\omega = f(z)\, dz$ con $f \in \mathcal{O}(U)$.

Esercizio Siano U, V aperti di $\mathbb{C}$ e $h : V_w \to U_z$ olomorfa

Sia $\omega = f(z)\, dz$ 1-forma olomorfa su U $f \in \mathcal{O}(U)$

in particolare:

h è $\mathcal{C}^\infty$

ω è una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ complessa su U

$\rightsquigarrow$ $h^*\omega$ è una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ complessa su V

Verificare che se

$$z = h(w)$$

allora $\boxed{h^*\omega = f(h(w)) \cdot h'(w) \cdot dw}$

e quindi $h^*\omega$ è una 1-forma olomorfa su V.

<u>Notazione</u>: $\Omega^1_X(U) = \{1\text{-forme olomorfe su } U\}$

Ω^1_X = fascio delle 1 forme olomorfe su X

. è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

<u>Es.</u> Mostriamo che $\Omega^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \{0\}$.

Sia ω una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}_\infty$

Su $\mathbb{C}$ $\omega = f(z)\, dz$ f olomorfa su $\mathbb{C}$

Nell'intorno di ∞ abbiamo

$$w = \frac{1}{z} \qquad z = \frac{1}{w}$$

$$dz = -\frac{1}{w^2}\, dw$$

$$\Rightarrow \omega = f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw = g(w)\, dw$$

g olomorfa in $w=0$.

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{w}\right) = -w^2 g(w)$ olomorfa e nulla in $w=0$

$\Rightarrow f$ è olomorfa e nulla all'∞

$\Rightarrow f$ è costante e nulla

$\Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow \omega = 0$.

1-FORME MEROMORFE su X.

Sia $p \in X$, U intorno aperto di p in X

ω 1-forma olomorfa su $U \setminus \{p\}$.

$\leadsto \omega$ ha una singolarità isolata in p.

Se z è una coord. locale per X in p

$\omega = f(z)\, dz$ $\quad$ f ha una sing. isolata in $z_0 \leftrightarrow p$

Se w è un'altra coord. locale per X in p:

$\omega = g(w)\, dw$ $\quad$ g ha una sing. isolata in $w_0 \leftrightarrow p$

Se $z = \varphi(w)$ camb. coordinate:

$$\Rightarrow \boxed{g(w) = f(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)}$$

- φ biolomorfismo $\Rightarrow \varphi'$ olom. e non nulla in w_0

ma f e g hanno lo stesso tipo di singolarità isolate in z_0 / cvd.

Esercizi da Miranda:

pag. 111/112: Es. A, B, C, D, E
pag. 117 Es. H.

<u>OSS</u> X sup. di Riemann
$p \in X$ U intorno aperto di p
$\omega \in \Omega^1(U \setminus \{p\})$

Compariamo due scritture
locali in p:

$$\omega = f(z)\,dz = g(w)\,dw$$

vediamo che:

f è meromorfa in $z_0 \leftrightarrow p$
$\Longleftrightarrow$ g è merom. in $w_0 \leftrightarrow p$

e in tal caso: $\mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{ord}_{w_0} g$

<u>Def.</u> Sia $U \subseteq X$ aperto. Una 1-forma meromorfa su U è una 1-forma ω olomorfa su $U \setminus S$, dove $S \subset U$ è discreto, t.c. $\forall p \in S$ localmente si abbia $\omega = f(z)\,dz$ con f meromorfa in p.

Poniamo anche:

$$\mathrm{ord}_p \omega := \mathrm{ord}_{z_0} f \qquad z_0 \mapsto p$$

Diciamo che ω ha uno zero/un polo se lo ha f.

$$\mathcal{M}_X^{(1)}(U) = \{1\text{-forme meromorfe su } U\}$$

- è uno spazio vett. complesso
- è un modulo su $\mathcal{M}_X(U)$
- $\mathcal{M}_X^{(1)}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli.

<u>ES.</u> (1-forme meromorfe su $\mathbb{C}_\infty$).

Sia ω una 1-forma meromorfa su $\mathbb{C}_\infty$

Su $\mathbb{C}$:
$$\omega = f(z)\, dz$$

con f meromorfa su $\mathbb{C}$

In ∞:
$$w = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{1}{w}$$

$$\omega = \underbrace{f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)}_{g(w)} dw$$

g meromorfa in $w=0$

$\Rightarrow f$ meromorfa anche in $z = \infty$

$\Rightarrow f$ è meromorfa su $\mathbb{C}_\infty$

$\Rightarrow f$ è razionale: $f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i}$

$$\omega = \prod_{i=1}^{n} (z-\lambda_i)^{e_i} dz \qquad e_i \in \mathbb{Z},\ \lambda_i \in \mathbb{C}$$

③

$\leadsto \operatorname{ord}_{\lambda_i} \omega = e_i$

$$\operatorname{ord}_\infty \omega = \operatorname{ord}_0 g(w) = \operatorname{ord}_\infty f - 2 =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \cancel{\operatorname{ord}}\, e_i - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \operatorname{ord}_p \omega = -2$$

<u>OSS. 1</u> Sia X sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Allora l'insieme degli zeri e dei poli di ω in X è discreto.

<u>Lemma</u> ~~OSS.2~~ Sia X una sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X $\omega \neq 0$. Allora

$\mathcal{M}^{(1)}_X(X)$ è uno spazio vettoriale di <u>dim. 1</u> nel campo $\mathcal{M}(X)$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\mathcal{M}(X)$ è un campo e $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ è un modulo su $\mathcal{M}(X)$
$\Rightarrow$ è uno spazio vett. su $\mathcal{M}(X)$.
Dobbiamo mostrare che ha dim. 1, cioè che $\omega \neq 0$ è una base.