$\rightsquigarrow \operatorname{ord}_{\lambda_i} \omega = e_i$

$$\operatorname{ord}_\infty \omega = \operatorname{ord}_0 g(w) = \operatorname{ord}_\infty f - 2 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} e_i - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \operatorname{ord}_p \omega = -2$$

<u>OSS. 1</u> Sia X sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Allora l'insieme degli zeri e dei poli di ω in X è discreto.

<u>Lemma</u> Sia X una sup. di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Allora

$\mathcal{M}^{(1)}_X(X)$ è uno spazio vettoriale di dim. 1 nel campo $\mathcal{M}(X)$.

DIM. $\mathcal{M}(X)$ è un campo e $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ è un modulo su $\mathcal{M}(X)$ $\rightarrow$ è uno spazio vett. su $\mathcal{M}(X)$. Dobbiamo mostrare che ha dim. 1, cioè che $\omega \neq 0$ è una base.

Sia $\eta \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. (4)

localmente su un aperto U di X con coord. locale z:

$$\omega = a(z)\,dz \qquad a, b \text{ meromorfe su } U$$
$$\eta = b(z)\,dz \qquad a \neq 0$$

$\Rightarrow f := \frac{b(z)}{a(z)}$ meromorfa su U.

Se V è un aperto di X con ~~coord~~ coord locale w e $U \cap V \neq \emptyset$:

se $z = \varphi(w)$ camb. di coord.

$\Rightarrow$ in $U \cap V$ $\quad dz = \varphi'(w)\,dw$

in V

$$\omega = \alpha(w)\,dw \qquad \rightsquigarrow \frac{\beta(w)}{\alpha(w)} \text{ merom. su } V$$
$$\eta = \beta(w)\,dw$$

$$\alpha(w) = a(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)$$
$$\beta(w) = b(\varphi(w)) \cdot \varphi'(w)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}(w) = \frac{b}{a}(\varphi(w))$$

$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ e $\frac{b}{a}$ si incollano su $U \cap V$

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $\eta = f \cdot \omega$.

OSS. 2 Sia $U \subseteq X$ aperto e $f \in \mathcal{O}(U)$

Allora si definisce una 1-forma olomorfa df su U che in coord. locali è data da:

$$\cancel{f(z)} \quad df = f'(z)\, dz.$$

Esercizio

verificare che:

1) df è ben definito
2) coincide con il differenziale usato C^∞

$\rightsquigarrow df \in \Omega^1(U)$.

Se invece abbiamo $g \in \mathcal{M}(U)$ allora: $g \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ S discreto in U

$\Rightarrow dg \in \Omega^1(U \setminus S)$ e localmente $dg = \underbrace{g'(z)}_{\text{meromorfa}} dz$

$\Rightarrow dg$ è meromorfa su U

$\Rightarrow dg \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$

Se g è non costante, allora $dg \neq 0$.

Corollario. Ogni superficie di Riemann $\mathbb{C}$ compatta ammette 1-forme meromorfe $\neq 0$.

(infatti $\exists f \in \mathcal{M}(X)$, non costanti).
$\rightsquigarrow df$.

DIVISORI CANONICI.

Sia X una superficie di Riemann e ω una 1-forma meromorfa su X, $\omega \neq 0$. Il DIVISORE di ω è

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} (\operatorname{ord}_p \omega) \cdot p.$$

- Un divisore di questa forma si dice DIVISORE CANONICO e si indica con K;

Nota: se $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$

$$f \cdot \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$$

e $$\operatorname{div}(f \cdot \omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega).$$

Lemma. Sia D un divisore su X.

Allora

D è un divisore canonico $\Longleftrightarrow$ $D \sim \operatorname{div}(\omega)$

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\boxed{\Longrightarrow}$ Se $D = \operatorname{div}(\eta)$, η 1-forma meromorfa $\neq 0$

$\exists\, f \in \mathcal{M}(X)$ t.c. $\eta = f \cdot \omega$

lemma

$f \neq 0$

$\Rightarrow D = \mathrm{div}(\eta) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$

$\sim \mathrm{div}(\omega)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $D \sim \mathrm{div}(\omega)$

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ t.c.

$D - \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f)$

$\Rightarrow D = \mathrm{div}(\omega) + \mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(f \cdot \omega)$

$\Rightarrow D$ canonico.

$\rightsquigarrow$ i divisori canonici formano una classe di equivalenza intera in $\mathrm{Div}(X)$

$\rightsquigarrow$ se X è compatta: hanno tutti lo stesso grado

Es: $X = \mathbb{C}_\infty \Rightarrow \deg K_X = -2$.

Sia $F: X \longrightarrow Y$ mappa olomorfa non costante tra sup. di Riemann.

Se $q \in Y$ definiamo

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\mathrm{mult}_p F) \cdot p$$

(3)

$\rightsquigarrow F^*(q)$ è supportato nella fibra $F^{-1}(q)$.

La definizione si estende per linearità

se $D = \sum_q n_q q$ divisore su Y

poniamo $F^*(D) := \sum_q n_q F^*(q)$

$\rightsquigarrow F^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$ omo di gruppi.

<u>Lemma</u> Sia $f \in \mathcal{M}(Y) \setminus \{0\}$.

Allora

$$F^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\underbrace{f \circ F}_{\substack{\text{meromorfa su } X \\ \neq 0}})$$

DIM. Se $p \in X$ abbiamo:

$$\underbrace{\mathrm{ord}_p(f \circ F)}_{\substack{\text{coeff. di } p \\ \text{in } \mathrm{div}(f\circ F)}} = \underbrace{(\mathrm{mult}_p F) \cdot \underbrace{\mathrm{ord}_{F(p)} f}_{\substack{\text{coeff.} \\ \text{di } F(p) \\ \text{in } \mathrm{div}(f)}}}_{\substack{\text{coeff. di } p \text{ in} \\ F^*(\mathrm{div}\, f)}}$$

(esercizio).

$\rightsquigarrow$ il pull-back di un divisore principale è principale

$\rightsquigarrow$ F^* induce un omo di gruppi (9)

$$F^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X).$$

<u>Supponiamo ora X e Y compatte.</u>

Allora se $q \in Y$

$$\deg F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p F = \deg F$$

$\Rightarrow$ se D è un divisore su Y

$$\deg F^*(D) = (\deg F) \cdot (\deg D)$$

Il DIVISORE DI RAMIFICAZIONE di F è

$$R_F := \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p F - 1) \cdot p$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Supp}\, R_F$ = i punti di ramificazione di F

e la formula di Hurwitz è:

$$2g(X) - 2 = (\deg F) \cdot (2g(Y) - 2) + \boxed{\deg R_F}$$

<u>OSS</u> (pullback di 1-forme olomorfe/meromorfe)

Sia $F : X \to Y$ mappa olom. non costante

ω 1-forma olomorfa su Y

Localmente: z coord. locale su X

w " " su Y

$w = f(z)$ espressione locale di F

$\omega = a(w)\,dw$ localmente

$\rightsquigarrow$ si definisce $F^*\omega$ come

$$F^*\omega = a(f(z))\, f'(z)\, dz$$

Esercizio Verificare che $F^*\omega$ è definita globalmente e che coincide con il pull-back come 1-forma C^∞.

Allo stesso modo: se ω è 1-forma meromorfa su Y

$\Rightarrow F^*\omega$ è una 1-forma meromorfa su X.

<u>Prop</u> Sia $F: X \to Y$ olomorfa e non costante, e ω una 1-forma meromorfa su Y, $\omega \neq 0$. Allora:

$$\underbrace{\operatorname{div}(F^*\omega)}_{\text{divisore canonico su } X} = F^*(\underbrace{\operatorname{div}\omega}_{\text{divisore canonico su } Y}) + R_F$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $q \in Y$. Allora q compare con $(\operatorname{ord}_q \omega)\cdot q$ in $\operatorname{div}(\omega)$,

$\rightsquigarrow$ il pull-back è

$$\sum_{p \in F^{-1}(q)} (\operatorname{ord}_q \omega)\cdot(\operatorname{mult}_p F)\cdot p$$

so i punti $p \in F^{-1}(q)$ hanno coeff. in $F^*(\text{div}\,\omega) + R_F$:

$(\text{ord}_q \omega) \cdot (\text{mult}_p F) + \text{mult}_p F - 1$

dobbiamo mostrare che è

$\text{ord}_p F^* \omega$.

Scegliamo coordinate locali:

z in X, centrate in p

w in Y, centrate in q

t.c. l'espressione locale di F sia

$w = z^m$ con $m = \text{mult}_p F$.

localmente:

$\omega = a(w)\, dw$ a meromorfa

$$F^*\omega = a(z^m) \cdot m z^{m-1}\, dz$$

$$\Rightarrow \text{ord}_p F^*\omega = \text{ord}_0 \left(z^{m-1} \cdot a(z^m) \right) =$$

$$= \text{ord}_0 z^{m-1} + \text{ord}_0 a(z^m) =$$

$$= m - 1 + m \cdot \text{ord}_0 a =$$

$$= m \cdot \text{ord}_q \omega + m - 1. \quad \boxtimes$$

<u>Coroll.</u> Sia X una superficie di Riemann cpta. Allora $\deg K_X = 2g(X) - 2$

DIM. $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ non costante, sia $F: X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ la mappa associata ($\Rightarrow F$ non costante)

Sia ω una 1-forma meromorfa su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\omega \neq 0$.

Allora $F^*\omega$ è una 1-forma meromorfa su X

$\Rightarrow \operatorname{div}(F^*\omega) \sim K_X$

$\Rightarrow \deg K_X = \deg(\operatorname{div}(F^*\omega))$

$\Rightarrow$ basta mostrare che $\deg \operatorname{div}(F^*\omega) = 2g(X)-2$.

Abbiamo:

$$\operatorname{div}(F^*\omega) = F^*(\operatorname{div}\omega) + R_F.$$

Prendendo i gradi

$$\deg(\operatorname{div}(F^*\omega)) = \deg F^*(\operatorname{div}\omega) + \deg R_F$$

$$= (\deg F) \cdot \underbrace{\deg(\operatorname{div}\omega)}_{=-2 \text{ (esempio)}} + \deg R_F =$$

$$= (\deg F) \cdot (2g(\mathbb{P}^1)-2) + \deg R_F$$

$$= 2g(X)-2.$$

Hurwitz

Nota: se $F: X \to Y$ è non costante tra sup. di R. cpte e ω è una 1-forma meromorfa su Y, $\omega \neq 0$

$$\operatorname{div}(F^*\omega) = F^*(\operatorname{div}\omega) + R_F$$

$$\Big\Downarrow \text{ gradi}$$

$$2g(X) - 2 = (\deg F)\cdot(2g(Y)-2) + \deg R_F$$

OSS Sia X una superficie di R. e K_X un divisore canonico. Allora i fasci

$$\Omega^1_X$$

$$\text{e} \quad \mathcal{O}_X(K_X)$$

sono isomorfi.

DIM. Infatti: $K_X = \operatorname{div}(\omega)$ ω 1-forma su X, $\omega \neq 0$

Se $U \subseteq X$ è un aperto definiamo

$$\varphi_U : \mathcal{O}_X(K_X)(U) \longrightarrow \Omega^1_X(U)$$

$$f \longmapsto f\cdot \omega_{|U}$$

Noto: $\operatorname{div}(f\cdot\omega_{|U}) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega_{|U})$

$$= \operatorname{div}(f) + K_{X|U} \geq 0$$

$\Rightarrow f \cdot \omega_{|U}$ è olomorfa su U (14)

$\Rightarrow \varphi_U$ è ben definita.

$\rightsquigarrow \varphi : \mathcal{O}_X(K_X) \longrightarrow \Omega^1_X$ morfismo di fasci

· φ_U è iniettivo

· Mostriamo che φ_U è anche suriettivo

Sia $\eta \in \Omega^1_X(U)$

Sia $U = \coprod_\alpha U_\alpha$ la decomp. in comp. connesse (aperti di X)

$\forall \alpha \; \exists f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ t.c. $\eta_{|U_\alpha} = f_\alpha \cdot \omega_{|U_\alpha}$

$\rightsquigarrow$ le f_α danno $f \in \mathcal{M}(U)$ t.c.

$\eta = f \cdot \omega_{|U}$ su U.

Abbiamo:

$$0 \le \operatorname{div}(\eta) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega_{|U})$$
$$= \operatorname{div}(f) + K_{X|U}$$

η olomorfa

$$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(K)(U). \quad \boxtimes$$

Nelle interpretazioni note di $\operatorname{Pic}(X)$ abbiamo lo stesso effetto:

$\operatorname{Pic}(X) = \text{divisori} / \text{equiv. lineare}$ $\qquad [K_X]$

fasci invertibili / iso $\qquad \mathcal{O}_X(K_X) \cong \Omega^1$

fibrati lineari/iso $\mathcal{T}_X^*$ cotangente olomorfo (15)

$H^1(X, \mathcal{O}^*)$ inverso del cociclo del tangente

Dualità di Serre:

Teorema. Sia X una superficie di Riemann cpta e D un divisore su X. Allora esiste un isom. naturale di spazi vettoriali complessi:

duale

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(D))^*$$

Coroll. 1 Per ogni divisore D su X si ha:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = h^1(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

e

$$h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

DIM. La II relazione segue dal teorema. La I relazione segue dalla II per $\tilde{D} = K_X - D$.

Coroll. 2 (uguaglianza dei 3 generi). Sia X una superficie di Riemann cpta si ha: $g_{top}(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega^1_X)$

fibrati lineari / iso $\mathcal{T}_X^*$ cotangente (15) olomorfo

$H^1(X, \mathcal{O}^*)$ inverso del cociclo del tangente

Dualità di Serre:

Teorema. Sia X una superficie di Riemann cpta e D un divisore su X. Allora esiste un isom. naturale di spazi vettoriali complessi:

duale

$$H^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(D))^*$$

Coroll. 1 Per ogni ~~gen~~ divisore D su X si ha:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) = h^1(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

e $$h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

$\boxed{\text{DIM.}}$ La II relazione segue dal teorema. La I relazione segue dalla II per $\tilde{D} = K_X - D$.

Coroll. 2 (uguaglianza dei 3 generi). Sia X una superficie di Riemann cpta si ha: $g_{top}(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega^1$

$\Big(h^0(X, \Omega^1_X) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) =$
$=$ dimensione dello spazio
vett. delle 1-forme olomorfe su $X \Big)$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Dal Coroll. 1 per $D = 0$ otteniamo

$$1 = h^0(\mathcal{O}_X) = h^1(\mathcal{O}_X(K_X))$$

$$h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\underbrace{\mathcal{O}_X(K_X)}_{\cong\ \Omega^1_X}) = h^0(\Omega$$

Ricordiamo la formula di R.R:
$\forall D$ si ha

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - h^1(\mathcal{O}$$

Applicandola a $D = K_X$

$$\rightsquigarrow h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) - \underbrace{h^1(\mathcal{O}_X(K_X))}_{1} = 2g(X) - 2$$
$$+ 1 - h^1(\mathcal{O}_X)$$

$$\rightsquigarrow 2\, h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = 2g(X)$$
$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = g(X)$$
$$\| $$
$$h^0(\Omega^1_X).$$ ☒

Note: in particolare:
$g(X) = 0 \implies H^0(\Omega^1_X) = \{0\} \implies$ X non ha 1-forme olomorfe $\neq 0$

Se $p(X) > 0 \Rightarrow H^0(\Omega^1_X) \neq \{0\}$
$\Rightarrow \exists$ sempre 1-forme olomorfe $\neq 0$ su X.

<u>Teorema di Riemann-Roch</u>:
Sia X una sup. di R. cpta e D un divisore su X. Allora:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) = \deg D + 1 - g(X).$$

(segue dalla formula R.R. debole con dualità di Serre e $h^1(\mathcal{O}_X) = g(X)$)

<u>Corollario</u>. Sia X sup. R. cpta e D un divisore su X. Se
$$\deg D \geq 2g-1$$
allora: $h^1(\mathcal{O}(D)) = 0$
e $h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ $\deg(K_X - D) = 2g-2-\deg D < 0$
$$\Rightarrow \underbrace{h^0(\mathcal{O}(K_X - D))}_{\substack{\| \leftarrow \text{dualità di Serre} \\ h^1(\mathcal{O}(D))}} = 0$$

<u>Corolla</u> Sia X una sup. di R. cpta con $g(X)=0$. Allora $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $D = p \qquad p \in X$.

$$\deg D = 1 \geq g - 1$$

$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(p)) = 1 + 1 = 2.$$

($H^0(X, \mathcal{O}_X(p))$ sono funzioni olomorfe su $X \setminus \{p\}$ e aventi al più un polo semplice in p; contengono $\mathbb{C}$ = olomorfe su X),

$\Rightarrow \exists f \in H^0(\mathcal{O}_X(p))$ non costante

$\Rightarrow f$ ha un unico polo in p, semplice

$\Rightarrow f$ induce un iso $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.