$\Rightarrow$ L è un fibrato lineare olomorfo (3)
su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con ricoprimento trivializzante
$\{U, V\}$.

Scriviamo la transizione:

$$\begin{tikzcd}
 & \left(x=\lambda,\ y=\lambda\frac{t}{s},\ (s:t)\right) \in \pi^{-1}(U\cap V) \arrow[dl, "\phi_U"', "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_V", "\sim"'] & \\
(U\cap V)\times\mathbb{C} \arrow[rr, bend right] & U\cap V & (U\cap V)\times\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$((s:t), \lambda)$ $\qquad\qquad$ $\left((s:t), \lambda\cdot\frac{t}{s}\right)$

$s\neq 0,\ t\neq 0$ $\qquad\qquad$ $\left(\frac{s}{t}\right)^{-1}$ $\qquad$ (y)

$T=\frac{t}{s}$

$\Rightarrow g_{UV}(s:t)=\frac{t}{s}$ transizione

$U \longleftrightarrow U_0$ $\qquad$ Grado d: $f_{01}=\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^d$

$V \longleftrightarrow U_1$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{L \text{ ha grado } -1}$

$\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{Z}$

$L \longleftrightarrow -1$

<u>OSS</u> Sia X una superficie di Riemann compatta.

La mappa $\qquad \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$

$f(z) \longmapsto e^{2\pi i f(z)}$

è un morfismo di fasci suriettivo con nucleo il fascio $\underline{\mathbb{Z}}$ delle funzioni loc. costanti a valori in $\mathbb{Z}$.

⇝ abbiamo una succ. esatta corta di fasci di gruppi abeliani su X:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$$

SUCCESSIONE ESPONENZIALE

Considériamo la succ. esatta lunga in coom. associata:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{C} \arrow[r, two heads, "\text{suriettiva}"] & \mathbb{C}^* \arrow[r, "0"] & H^1(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\text{iniettiva}"] \\
 & & & & H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[d] \\
 & & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

$$z \longmapsto e^{2\pi i z}$$

⇝ ~~$0 \to H^1(X,\mathbb{Z})$~~

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to \underbrace{H^1(X,\mathcal{O}_X^*)}_{Pic(X)} \xrightarrow{deg} H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

- $H^2(X,\underline{\mathbb{Z}}) \cong H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (coomologia singolare intera)

(perché: X è una superficie topologica compatta e orientabile

($H^2_{dR}(X) \cong H^2(X,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$)

- Fatto: l'omomorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$
$$\| $$
$$\mathrm{Pic}(X)$$

coincide con il grado
$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$$

- $\mathrm{Pic}^0(X) := \ker \deg \subset \mathrm{Pic}(X)$

$\mathrm{Pic}^0(X) = \{0\} \iff X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

- dalle succ. esatte abbiamo, come gruppi

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \ker \deg$$
$$\|$$
$$\mathrm{Im}(H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X))$$
$$\wr\|$$
$$\frac{H^1(X, \mathcal{O}_X)}{\mathrm{Im}(H^1(X, \mathbb{Z}))}$$

$\leftarrow$ spazio vett. complesso di dim. finita $\rightsquigarrow \mathbb{C}^r$

reticolo in $\mathbb{C}^r$

$\rightsquigarrow \mathrm{Pic}^0(X)$ è un toro complesso di dim. r.

Esercizi da Miranda:

Es. C, D p. 137.

Mappe nello spazio proiettivo.

Sia X superficie di Riemann.

Siano $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$, $f_i \neq 0 \ \forall i$.

~~Definiamo~~ Vorremmo definire

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$
$$p \longmapsto [f_0(p) : \dots : f_n(p)].$$

- La ϕ è definita nei punti $p \in X$ t.c.
  - ogni f_i è regolare in p
  - $\exists f_i$ non nulla in p.

Allora nell'intorno $U(p)$ di p si ha

$$\phi : U(p) \longrightarrow \mathbb{C}^n = U_i \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$\phi = \left(\frac{f_0}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i} \right) \quad \text{olomorfa in } p$$

$\Rightarrow \phi$ olomorfa in p.

Lemma ϕ si estende ad un'applicazione olomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n$.

$\boxed{\text{DIM}}$ Sia $p \in X$ e $m := \min_{i=0,\dots,n} \operatorname{ord}_p f_i$

Oss. Se:

$m < 0 \iff \cdot f_i$ t.c. f_i ha un polo in p

$m > 0 \iff$ tutte le f_i sono regolari e nulle in p

$\rightsquigarrow$ se $m = 0$, la ϕ è ~~regolare~~ definita in p

Sia U un intorno aperto di p t.c.:

- $\exists z$ coord. locale per X in U, centrata in p
- ogni f_i è olomorfa in $U \setminus \{p\}$
- le f_i non hanno zeri comuni in $U \setminus \{p\}$

$\rightsquigarrow \phi : U \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^n$ è definita e olomorfa.

Siano: $g_i(z) := z^{-m} f_i(z)$

$\forall i = 0, \dots, n$.

$\rightsquigarrow g_i$ è olomorfa in $U \setminus \{p\}$

e $\mathrm{ord}_p g_i = -m + \mathrm{ord}_p f_i \geq 0$

$\rightsquigarrow g_i$ è olomorfa in U.

Inoltre: se i_0 è t.c. $\mathrm{ord}_p f_{i_0} = m$, allora $g_{i_0}(p) \neq 0$ $(\mathrm{ord}_p g_{i_0} = 0)$.

In $U \setminus \{p\}$ abbiamo:

$\phi(z) = (f_0(z) : \dots : f_n(z)) =$

$= (z^{-m} f_0(z) : \dots : z^{-m} f_n(z)) =$

$= (f_0(z) : \quad : f_n(z))$ risulta definita e olomorfa in p.

<u>Note</u>: $g_i(p)=0 \iff \mathrm{ord}_p f_i > 0$

$\iff \mathrm{ord}_p f_i > m = \min_j \mathrm{ord}_p f_j$.

Sia ora X compatta e D un divisore t.c. $H^0(\mathcal{O}_X(D)) \neq \{0\}$.

Consideriamo una base $f_0, \ldots, f_n$ di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$

e definiamo

$$\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$p \longmapsto (f_0(p) : \quad : f_n(p)).$$

- ϕ_D è ben definita e olomorfa
- $n = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$.
- cambiando la base di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$, la ϕ_D viene composta con una proiettività.

<u>Es.</u> $X = \mathbb{C}_\infty \qquad D = 2\infty$

$H^0(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{O}(D)) = \{ g(z) \mid g \in \mathbb{C}[z]$ polinomi di grado $\leq 2\}$.

base: $1, z, z^2$

$\phi_D : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \qquad \phi_D(z) = (1 : z : z^2)$

$$\mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad (x_0 : x_1)$$

$$z = \frac{x_1}{x_0}$$

$$\rightsquigarrow \phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(x_0 : x_1) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_1^2}{x_0^2}\right) =$$

$$= (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2).$$

<u>Richiamo</u>: $\forall p \in X$

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

e si ha:

- $H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D))$
- $H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$ iperpiano in $H^0(\mathcal{O}_X(D))$.

<u>Def</u> Il punto p è un PUNTO BASE per il divisore D se:

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D)).$$

Significa che: se $f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$

cioè $\mathrm{ord}_q f \geq -D(q) \ \forall q$

allora automaticamente si ha

$$\mathrm{ord}_p f \geq -(D(p) - 1) = -D(p) + 1$$

cioè: $\nexists f \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$ con $\mathrm{ord}_p f = -D(p)$.

In tal caso si ha:

$$\phi_D = \phi_{D-p}.$$

<u>Lemma</u>. Dato D, con $H^0(\mathcal{O}(D)) \neq 0$, $\exists F$ divisore effettivo t.c.:

1) $D-F$ non ha punti base

cioè: $H^0(\mathcal{O}(D-F-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-F))$ $\forall p \in X$.

2) $H^0(\mathcal{O}(D-F)) = H^0(\mathcal{O}(D))$

$$\Longrightarrow \phi_D = \phi_{D-F}.$$

$\boxed{\text{DIM}}$ Se D non ha punti base: prendiamo $F=0$.

Se D ha un punto base p_1, consideriamo $D_1 := D - p_1$.

Se D_1 non ha punti base: $F = p_1$.

Se D_1 ha un punto base, consideriamo

$D_2 = D_1 - p_2$, e così via.

Siccome $H^0(\mathcal{O}(D - \sum_{i=1}^{r} p_i)) = 0$

se $r > \deg D$

mentre $0 \neq H^0(\mathcal{O}(D)) = H^0(\mathcal{O}(D_1)) = H^0(\mathcal{O}(D_2)) \ldots$

$\Rightarrow$ al più in $\deg D$ passi troviamo un divisore senza punti base.