Prop: Sia D un divisore con $H^0(\mathcal{O}(D))\neq 0$ 6
e senza punti base. Siano $p, q \in X$, $p \neq q$.
Allora

$$\phi_D(p) = \phi_D(q) \iff H^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-q)).$$

$\boxed{\text{DIM}}$ p non è un punto base per D

$$\Rightarrow \underbrace{H^0(\mathcal{O}_X(D-p))}_{\text{è un iperpiano}} \subsetneq H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

Sia $f_1, \dots, f_n$ una base di $H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$
e sia $f_0 \in H^0(\mathcal{O}_X(D)) \setminus H^0(\mathcal{O}_X(D-p))$

$\rightsquigarrow \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ base di $H^0(\mathcal{O}_X(D))$

$\rightsquigarrow \phi_D = (f_0 : \quad : f_n) : X \longrightarrow \mathbb{P}^n.$

Se $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad \mathrm{ord}_p f_i \geq -D(p) + 1 > -D(p)$

e: $\quad \mathrm{ord}_p f_0 = -D(p)$

$$\rightsquigarrow -D(p) = \min_{i=0,\dots,n} \mathrm{ord}_p f_i$$

$$\Rightarrow \phi_D(p) = (1 : 0 : \quad : 0) \in \mathbb{P}^n.$$

Abbiamo:

$$\phi_D(q) = \phi_D(p) \iff \phi_D(q) = (1 : 0 \quad : 0)$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{ord}_q f_i > \mathrm{ord}_q f_0 \quad \forall i = 1, .., n.$ (7)

Nota: $\mathrm{ord}_q f_j \geq -D(q) \quad \forall j = 0, .., n$

Inoltre: q non è un punto base

$\Rightarrow H^0(\mathcal{O}(D-q)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D))$

$\Rightarrow \exists j \in \{0, .., n\}$ t.c. $f_j \notin H^0(\mathcal{O}(D-q))$

cioè: $\mathrm{ord}_q f_j = -D(q)$

Quindi:

$\phi_D(q) = \phi_D(p) \Longleftrightarrow \mathrm{ord}_q f_0 = -D(q)$

e $\mathrm{ord}_q f_i > -D(q)$

$\forall i = 1, .., n.$

$\Updownarrow$

$f_1, .., f_n \in H^0(\mathcal{O}(D-q))$

$\Updownarrow$

$H^0(\mathcal{O}(D-p)) = H^0(\mathcal{O}(D-q)).$

Certamente abbiamo $\Leftarrow$

Per mostrare $\Rightarrow$

$H^0(\mathcal{O}(D-p)) = H^0(\mathcal{O}(D-q))$

$\cup|$

$H^0(\mathcal{O}(D-p-q))$

Sia $f \in H^0(\mathcal{O}(D-p))$

$= H^0(\mathcal{O}(D-q)).$

Allora: $\mathrm{ord}_p f \geq -D(p) + 1$

$\mathrm{ord}_q f \geq -D(q) + 1$

e $\mathrm{ord}_r f \geq -D(r) \quad \forall r \in X \setminus \{p, q\}$

$\Rightarrow f \in H^0(\mathcal{O}(D-p-q)) \Rightarrow$ ok. (3)

Corollario. Sia D un divisore. ~~Allora~~ ~~ϕ_D è iniettiva~~ Supponiamo che:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2 \quad \forall p, q \in X, p \neq q.$$

Allora ϕ_D è iniettiva.

$\boxed{\text{Dim}}$ Abbiamo, se $p \neq q$:

$$H^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) \underset{\neq}{\subset} H^0(\mathcal{O}_X(D-p)) \underset{\neq}{\subset} H^0(\mathcal{O}(D))$$

$\leadsto p$ non è un punto base $\leadsto D$ non ha punti base.

Allora dalla Prop. precedente:

ϕ_D è iniettiva.

Es. $X = \mathbb{C}_\infty \quad D = 2\infty \quad h^0(\mathcal{O}(D)) = 3$

Dati $p, q \in \mathbb{C}_\infty \quad D-p-q$ ha grado zero

$\Rightarrow D-p-q$ è principale

$\Rightarrow \mathcal{O}(D-p-q) \cong \mathcal{O}_X \Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D-p-q)) = 1 = 3-2$

$\Rightarrow \phi_D$ è iniettiva.

Es. Sia $\phi: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ data da:

$$\phi(x_0 : x_1) = (x_0^3 : x_0 x_1^2 : x_1^3).$$

Esercizio Verificare che ϕ è iniettiva e che l'immagine in $\mathbb{P}^2$ $(y_0 : y_1 : y_2)$ è la curva di equazione:

$$\underbrace{y_1^3 = y_0 y_2^2}_{\text{singolare in } (1:0:0)}$$

Studiamo quando $\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ è un embedding, ovvero:

- $\phi_D(X) \subset \mathbb{P}^n$ è una sottovarietà complessa
- $\phi_D : X \xrightarrow{\simeq} \phi_D(X)$ è biolomorfismo

Supponiamo: D senza punti base e ϕ_D iniettiva

Sia $p \in X$ e cerchiamo un criterio perché ϕ_D sia un embedding nell'intorno di p

Scegliamo una base $f_0, \dots, f_n$ di
$$H^0(\mathcal{O}(D))$$
t.c. $\mathrm{ord}_p f_0 = -D(p)$

$\mathrm{ord}_p f_i > -D(p) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \phi_D(p) = (1 : 0 \quad : 0)$

$\rightsquigarrow$ localmente

$$\phi_D : U(p) \to \mathbb{C}^n$$

$$\underbrace{\left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0} \right)}_{\text{olomorfe e nulle in } p}$$

Supponiamo che $\exists\, i \in \{1, .., n\}$ t.c. $\operatorname{ord}_p\left(\frac{f_i}{f_0}\right) = 1 \iff \operatorname{ord}_p f_i = 1 - D(p)$

per semplicità sia $i = 1$.

Allora localmente

$$\phi_D = (h_1, .., h_n)$$ h_i olom. e nulle in p

$\operatorname{ord}_p h_1 = 1$

~~Sia~~ Allora: $h_1 : U(p) \to \mathbb{C}$] è biolomorfismo locale. $p \mapsto 0$

$$\phi_D(z) = \underbrace{(h_1(z), .., h_n(z))}_{\in \mathbb{C}^n} \qquad z \in U(p)$$

~~componendo localmente la ϕ_D con l'inversa di h_1 ψ:~~

- $\phi_D(U(p)) \subseteq \mathbb{C}^n$ è grafico di funzioni olomorfe

Precisamente abbiamo:

$$\begin{array}{c} U(p) \subseteq X \\ \text{coord. locale per } X \;\; \big\downarrow \\ 0 \in A \subseteq \mathbb{C} \xrightarrow{h_1} \tilde{A} \subseteq \mathbb{C} \ni 0 \end{array}$$

- h_1 è biolom. locale

$$\begin{array}{ccl} U(p) & \longrightarrow & A \subseteq \mathbb{C} \\ & & \Big\downarrow h = (h_1, .., h_n) \\ & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

l'immagine è grafico di funzioni olomorfe

$\cancel{(h_1(z), \ldots, h_n(z))}$

$$\tilde{A} \xrightarrow{(h_1)^{-1}} A \xrightarrow{h = (h_1 .., h_n)} \mathbb{C}^n$$

$$w \longmapsto z = h_1^{-1}(w) \longmapsto (w, k_2(w), .., k_n(w))$$

k_i olomorfe.

$\Rightarrow$ $\phi_D(U(p)) = \{(w, h_2(w), .., h_n(w)) \mid w \in \tilde{A}\}$

è una sottovarietà complessa di $\mathbb{C}^n$ e quindi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di dim 1

Se questo vale nell'intorno di ogni p:

allora $\phi_D(X)$ è una superficie di Riemann

e $\phi_D : X \longrightarrow \phi_D(X)$

è olomorfa e biunivoca

$\Rightarrow$ ϕ_D è biolomorfismo.

La condizione richiesta in p era che: (14)

$\exists i \in \{1, \dots, n\}$ t.c.

$$\mathrm{ord}_p f_i = -D(p)+1$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{ord}_p f_0 = -D(p) \\ \mathrm{ord}_p f_j \geq -D(p) \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array} \right).$$

Abbiamo: $f_1, \dots, f_n$ è una base di $H^0(\mathcal{O}(D-p))$

la condizione richiesta è equivalente a

$$\underbrace{H^0(\mathcal{O}(D-2p))}_{\text{contiene le } g \in H^0(\mathcal{O}(D)) \text{ t.c. } \mathrm{ord}_p g \geq -D(p)+2.} \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-p))$$

Abbiamo allora:

<u>Teorema</u> Sia X una sup. di Riemann cpta e D un divisore su X t.c.

$$h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2$$

$\forall p, q \in X$. (NB anche per $p=q$!

Allora: $\phi_D(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ è una superficie di Riemann e

e $\phi_D : X \to \phi_D(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ è biolomorfismo. (cioè ϕ_D è EMBEDDING)

$\boxed{\text{DIM}}$ La condizione per $p \neq q$ ci dice (13)
che D è senza punti base e
che ϕ_D è iniettiva.
Per $p = q$:

$$H^0(\mathcal{O}(D-2p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D)))$$

$\rightsquigarrow$ ϕ_D è embedding in p.

<u>Def</u> Si dice che D è MOLTO AMPIO
se ϕ_D è un embedding.
Si dice che D SEPARA I PUNTI
quando ϕ_D è
iniettiva.

Applicazione di Riemann-Roch

<u>Prop.</u> Se X una superficie di Riemann
cpta e D un divisore su X.
Se $\deg D \geq 2g$, allora D è senza
punti base.
Se $\deg D \geq 2g+1$, allora D è
molto ampio
($\to \phi_D$ embedding).

$\boxed{\text{DIM.}}$ $h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\mathcal{O}(K_X - D))$ (R.R.
$= \deg D + 1 - g$

Se $\deg(K_X - D) < 0$: allora $h^0(\mathcal{O}(K-D)) =$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D)) = \deg D + 1 - g$.

$\deg(K_X - D) = 2g - 2 - \deg D < 0$

sse $\deg D \geq 2g - 1$.

- D è senza punti base
$\iff H^0(\mathcal{O}(D-p)) \subsetneq H^0(\mathcal{O}(D)) \ \forall p \in X$
$\iff h^0(\mathcal{O}(D-p)) = h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$
$\forall p \in X$.

Se $\deg D \geq 2g$:
$\Rightarrow \deg(D-p) \geq 2g-1$
$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}(D-p)) = \deg(D-p) + 1 - g$
$= \deg D - 1 + 1 - g =$
$= h^0(\mathcal{O}(D)) - 1$. $\forall p \in X$
$\Rightarrow D$ è senza punti base.

Se $\deg D \geq 2g+1$: $\forall p, q \in X$
$\deg(D-p-q) \geq 2g-1$
$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D-p-q)) = \deg(D-p-q) + 1 - g$
$= \deg D - 2 + 1 - g = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - 2$
$\Rightarrow D$ è molto ampio.

<u>Coroll.</u> Ogni superficie di Riemann compatta può essere immersa in modo olomorfo in $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$.

<u>Prop</u> Sia X una sup. di Riemann cpta e $p \in X$. Allora

$$\exists\ \phi : X \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

biolomorfismo tra $X \setminus \{p\}$ e una sottov. complessa di $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{\text{DIM.}}$ Sia $D := (2g+1)p$ e siano

$$f_0, \dots, f_n \text{ base di } H^0(\mathcal{O}_X(D))$$

$\leadsto f_0, \dots, f_n$ sono olomorfe su $X \setminus \{p\}$

~~Possiamo inoltre sceglierle in modo t.c.~~
~~Se $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$, allora~~
~~$\phi(p) = (1 : 0 : \dots : 0)$~~

e possiamo scegliere: $f_0 = 1$

$\Rightarrow \phi = (1 : f_1 : \dots : f_n)$ espressione valida su $X \setminus \{p\}$

$\Rightarrow \phi(X \setminus \{p\}) \subseteq U_0 = \mathbb{C}^n$.

FASCI DI 1-FORME MEROMORFE ASSOCIATI A UN DIVISORE

Sia X una sup. di Riemann e $D \in \mathrm{Div}(X)$.
Definiamo un fascio $\Omega^1_X(D)$ di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali, sottofascio del fascio $\mathcal{M}^{(1)}_X$ del fascio delle 1-forme meromorfe:

$\forall U \subset X$ aperto

$$\Omega^1_X(D)(U) = \{ \omega \in \mathcal{M}^{(1)}_X(U) \mid \mathrm{ord}_p \omega + D(p) \geq 0 \ \ \forall p \in U \}$$

$$\mathrm{div}(\omega) + D_{|U} \geq 0$$

(se $\omega \not\equiv 0$).

- $\Omega^1_X(D)$ è un fascio
- se $D_1 \leq D_2$, si ha $\Omega^1_X(D_1) \subseteq \Omega^1_X(D_2)$
- se $D \geq 0$, si ha $\Omega^1_X \subseteq \Omega^1_X(D)$.

Mostriamo che:

$$\Omega^1_X(D) \cong \mathcal{O}_X(K_X + D)$$

(analogo al caso $D=0$ già visto):

$$K_X = \mathrm{div}(\omega) \qquad \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X),\ \omega \not\equiv 0$$

Se $f \in \mathcal{O}_X(K_X + D)(U)$:

$$\mathrm{div}(f) + K_{X|U} + D_{|U} \geq 0$$
$$\| $$
$$\mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega_{|U}) + D_{|U}$$
$$\|$$
$$\mathrm{div}(f \cdot \omega_{|U}) + D_{|U}$$

$\Rightarrow f \cdot \omega_{|U} \in \Omega^1_X(D)(U)$

$\rightsquigarrow$ questo dà un isom. di fasci.

→ Se X è compatto:

$H^0(X, \Omega^1_X(D))$ e $H^1(X, \Omega^1_X(D))$ hanno dimensione finita..