Dualità di Serre

Sia $U \subseteq X$ aperto

$f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ $\qquad \omega \in \Omega^1_X(-D)(U)$

allora $f \cdot \omega \in \mathcal{M}^1_X(U)$ e t.c.

$$\operatorname{div}(f \cdot \omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega) \geq -D_{|U} + D_{|U} = 0$$

$\Rightarrow f \cdot \omega \in \Omega^1_X(U)$

$\Rightarrow$ abbiamo un prodotto, a livello di fasci:

$$\mathcal{O}_X(D) \times \Omega^1_X(-D) \longrightarrow \Omega^1_X.$$

Mostriamo che questo induce un'appl. bilin.

$$H^0(\Omega^1_X(-D)) \times H^1(\mathcal{O}_X(D)) \to H^1(\Omega^1_X).$$

Sia $\omega \in H^0(\Omega^1_X(-D))$ e fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ di X.

Dato un cociclo $\{\xi_{ij}\} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D))$

$$\xi_{ij} \in \mathcal{O}_X(D)(U_{ij})$$

$$\xi_{ij} + \xi_{jk} = \xi_{ik} \quad \text{su } U_{ijk}$$

allora $\forall ij$ $\qquad \xi_{ij} \cdot \omega \in \Omega^1_X(U_{ij})$

$$\Rightarrow \{\xi_{ij}\omega\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^1_X)$$

e inoltre è un cociclo: $\xi_{ij}\omega + \xi_{jk}\omega = \xi_{ik}\omega$ su U_{ijk}.

$\Rightarrow$ abbiamo una mappa

$$\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \Omega^1_X). \quad (*)$$

Se $\eta = \{\eta_i\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D))$ e consideriamo il suo cobordo: $d\eta = \{\eta_j - \eta_i\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D))$

allora: $\{\eta_i \omega\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^1_X)$

e $\quad d\cdot\{\eta_i\omega\} = \{\eta_j\omega - \eta_i\omega\} = (d\{\eta_{ij}\})\cdot\omega$

Ovvero: la mappa (*) manda cobordi in cobordi e definisce una mappa $\mathbb{C}$-lineare

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D)) \to H^1(\mathcal{U}, \Omega^1_X)$$

Queste appl. sono compatibili con le mappe di raffinamento e inducono un'appl. $\mathbb{C}$-lineare

$$H^1(\mathcal{O}_X(D)) \to H^1(\Omega^1_X)$$

e così otteniamo una mappa $\mathbb{C}$-bilineare

$$H^0(\Omega_X(-D)) \times H^1(\mathcal{O}_X(D)) \to H^1(\Omega^1_X).$$

Abbiamo:

Dolbeault

1) $H^1(X, \Omega^1_X) \cong H^{1,1}_{\bar\partial}(X)$

2) $$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{\bar\partial A^{1,0}_{\mathbb{C}}(X)}$$

$$H^2_{dR}(X, \mathbb{C}) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{d A^1_{\mathbb{C}}(X)}$$

$$d A^1_{\mathbb{C}}(X) \supset \bar\partial A^{1,0}_{\mathbb{C}}(X)$$

perché se ω è di tipo $(1,0)$ allora
$\bar\partial \omega = d\omega$

$\Rightarrow$ c'è un omomorfismo

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \twoheadrightarrow H^2_{dR}(X, \mathbb{C})$$
$$[\omega]_{\bar\partial} \mapsto [\omega]_d$$

3) $H^2_{dR}(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ tramite l'integrazione

$\rightsquigarrow$ abbiamo un omomorfismo:

$$H^1(X, \Omega^1_X) \twoheadrightarrow \mathbb{C}.$$

Otteniamo quindi un'appl. $\mathbb{C}$-bilineare:

$$H^0(\cancel{X}, \Omega^1_X(-D)) \times H^1(\mathcal{O}_X(D)) \to \cancel{H^1(\Omega^1_X)}$$

che induce

$$i_D : H^0(\Omega^1_X(-D)) \to H^1(\mathcal{O}(D))^*.$$

Iniettività di i_D.

Sia $\omega \in H^0(\Omega^1_X(-D))$, $\omega \neq 0$.

Costruiamo $\xi \in H^1(\mathcal{O}(D))$ t.c.

$$i_D(\omega)(\xi) \neq 0 \Rightarrow i_D(\omega) \neq 0.$$

Fissiamo $p \in X$, $p \notin \operatorname{supp} D$, t.c. $\operatorname{ord}_p \omega = 0$,
e sia U_1 un intorno aperto di p t.c.

1) $U_1 \cap \operatorname{supp} D = \emptyset$
2) ω olom. e non nulla in U_1
- $\omega = g(z)\,dz$ z coord. locale in U_1, centrata in p, $g \in \mathcal{O}(U)$

Consideriamo

$$f = \frac{1}{z\, g(z)} \in \mathcal{M}(U_1), \in \mathcal{O}(U_1 \setminus \{p\})$$

Sia $U_0 := X \setminus \{p\} \Rightarrow \mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ ricopr. aperto di X

$U_{01} = U_1 \setminus \{p\}$

$f \in \mathcal{O}(U_{01}) = \mathcal{O}(D)(U_{01})$ perché $(\operatorname{supp} D) \cap U_{01} = \emptyset$

$\Rightarrow f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ e f è un 1-cociclo automaticamente (solo 2 aperti)

$\Rightarrow \xi := [f] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}(D)).$

in U_{01}

$$f \cdot w = \frac{1}{z f(z)} \cdot f(z)\, dz = \frac{1}{z}\, dz \quad \text{olomorfa in } U_{01}$$

$\rightsquigarrow f \cdot w \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^1_X)$

$\rightsquigarrow [fw] \in H^1(X, \Omega^1_X)$

Esplicitiamo la sua immagine nell'isom. con $H^{1,1}_{\bar\partial}(X)$

$$0 \to \Omega^1_X \hookrightarrow \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^2_{\mathbb{C}} \to 0 \quad \text{esatta}$$

dà $0 \to \Omega^1_X(X) \hookrightarrow \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{A}^2_{\mathbb{C}}(X) \twoheadrightarrow \underbrace{H^1(\Omega^1_X}_{\text{omo di connessione}}$ $\downarrow$ 0

$f \cdot w = \frac{1}{z}\, dz$ forma $(1,0)$ in U_{01}

$fw \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}})$ e $H^1(X, \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}}) = 0$

$\Rightarrow fw$ è un cobordo

$\Rightarrow \exists\ \sigma_0 \in \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}}(U_0) = \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}}(X \setminus \{p\})$

$\sigma_1 \in \mathcal{A}^{1,0}_{\mathbb{C}}(U_1)$

t.c. $\frac{1}{z}\, dz = \sigma_1 - \sigma_0$ su $U_1 \setminus \{p\}$

Nota: $d\sigma_i = \bar\partial \sigma_i$ perché sono $(1,0)$.

$d\sigma_0$ 2-forma $\mathcal{C}^\infty$ su $X \setminus \{p\}$

$d\sigma_1$ 2-forma $\mathcal{C}^\infty$ su U_1

e $\sigma_1 - \sigma_0$ è olomorfa in $U_1 \setminus \{p\}$

$\Rightarrow d(\sigma_1 - \sigma_0) = 0 \Rightarrow d\sigma_1 = d\sigma_0$ su $U_1 \setminus \{p\}$

$\Rightarrow$ si incollano a $\eta \in \mathcal{A}^2_{\mathbb{C}}(X)$

Sia ora C una piccola circonferenza in U_1, centrata in p, e $D \subset U_1$ il disco chiuso di bordo C.

$$\int_X \eta = \int_{X \setminus D} \eta + \int_D \eta = \int_{X\setminus D} d\tau_0 + \int_D d\tau_1 =$$

$$\underset{\text{Stokes}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-C} \tau_0 + \int_C \tau_1 = \int_C (\tau_1 - \tau_0) = \int_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0$$

$$2\pi i = \boxed{i_D(\omega)(\xi)}$$

Iniettività di i_D.

Fissiamo $q \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > h^1(\mathcal{O}_X) - 1$.

Allora $h^0(\mathcal{O}_X(nq)) \geq 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + n > 0$

$\Rightarrow \exists f \in h^0(\mathcal{O}_X(nq))$, $f \neq 0$ (f dipende da n)

Allora: $\mathrm{div}(f) + nq \geq 0$

Sia $D_n := D - nq$. Abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(D_n) \arrow[r, "\mu_f\ \text{molt. per } f", "\sim"'] \arrow[dr, "\text{molt. per } f"'] & \mathcal{O}_X(D_n - \mathrm{div}(f)) \arrow[d, equal] \\
& \mathcal{O}_X(D - (\underbrace{nq + \mathrm{div} f}_{\geq 0})) \arrow[d, hook] \\
& \mathcal{O}_X(D)
\end{tikzcd}$$

che induce:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathcal{O}(D_u)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "m_f = \text{molt. per } f"'] & H^1(\mathcal{O}_X(D-(uq+\operatorname{div} f))) \arrow[d, "\alpha"] \\
& H^1(\mathcal{O}(D))
\end{tikzcd}$$

Nota: α è suriettiva perché $\forall p$

$$H^1(\mathcal{O}_X(D-p)) \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{O}(D))$$

$\Rightarrow m_f$ è suriettiva. Dualmente abbiamo:

$$m_f^T : H^1(\mathcal{O}(D))^* \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}(D_u))^*$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ m_f$$

cioè: $\varphi \circ m_f(\xi) = \varphi(f \cdot \xi) \quad \forall \xi \in H^1(\mathcal{O}(D_u))$.

Allo stesso modo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_X(-D) \arrow[r, hook] \arrow[ddr, "\text{molt. per } f"'] & \Omega^1_X(-D+uq+\operatorname{div} f) \arrow[d, equal] \\
& \Omega^1_X(-D_u+\operatorname{div} f) \arrow[d, "\wr\ \mu_f"] \\
& \Omega^1_X(-D_u)
\end{tikzcd}$$

che induce un' appl. lineare iniettiva

$$H^0(\Omega^1_X(-D)) \longrightarrow H^0(\Omega^1_X(-D_u))$$
$$\omega \longmapsto f \cdot \omega$$

e abbiamo un diagramma:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
H^0(\Omega^1_X(-D)) \arrow[r, hook, "\cdot f"] \arrow[d, "i_D", "\wr"'] & H^0(\Omega^1_X(-D_u)) \arrow[d, "i_{D_u}"', "\wr"] \\
H^1(\mathcal{O}_X(D))^* \arrow[r, hook, "m_f^T"'] & H^1(\mathcal{O}_X(D_u))^*
\end{tikzcd}}$$

Il diagramma è commutativo: infatti

$\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$ e $\xi \in H^1(\mathcal{O}_X(D_u))$

$\omega \mapsto f\cdot\omega$

$$i_{D_u}(f\omega)(\xi) = \phi(\underbrace{\xi \cdot f\omega}_{\in H^1(\Omega^1_X)}) = \phi(f\xi\cdot\omega)$$

$$H^1(\Omega^1_X) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$$

$$= i_D(\omega)(f\xi) = m_f^T \circ i_D(\omega).$$

<u>Prop</u> Sia $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_X(D))^*$, $\varphi \neq 0$.
Se $m_f^T(\varphi) \in \operatorname{Im} i_{D_u}$, allora $\varphi \in \operatorname{Im} i_D$.
Più precisamente: se $\omega \in H^0(\Omega^1(-D_u))$ è t.c.

$$m_f^T(\varphi) = i_{D_u}(\omega),$$

allora $\frac{1}{f}\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$ e $i_D(\frac{1}{f}\omega) = \varphi$.

(DIM) Basta mostrare che $\frac{1}{f}\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$.
Infatti in tal caso si ha:

$$m_f^T\left(i_D\left(\tfrac{1}{f}\omega\right)\right) = i_{D_u}(\omega) = m_f^T(\varphi)$$

e m_f^T iniettiva $\Rightarrow \varphi = i_D(\frac{1}{f}\omega)$.

Sia $p \in X$ fissato. Dobbiamo mostrare che

$$\mathrm{ord}_p\left(\tfrac{1}{f}\omega\right) - D(p) \geq 0.$$

Sia U_1 intorno aperto di p t.c.

- $(\operatorname{Supp} D) \cap (U_1 \setminus p) = \emptyset$
- $q \notin U_1 \setminus \{p\}$
- $f \in \mathcal{O}^*(U_1 \setminus \{p\})$