Il diagramma è commutativo: infatti se

$\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$ e $\xi \in H^1(\mathcal{O}_X(D_u))$

$\omega \longmapsto f\cdot\omega$

$$i_{D_u}(f\omega)(\xi) = \phi(\underbrace{\xi \cdot f\omega}_{\in H^1(\Omega^1_X)}) = \phi(f\xi\cdot\omega)$$

$$H^1(\Omega^1_X) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$$

$$= i_D(\omega)(f\xi) = \cancel{\ldots}\; m_f^T \circ i_D(\omega).$$

<u>Prop</u> Sia $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_X(D))^*$, $\varphi \neq 0$.

Se $m_f^T(\varphi) \in \operatorname{Im} i_{D_u}$, allora $\varphi \in \operatorname{Im} i_D$.

Più precisamente: se $\omega \in H^0(\Omega^1(-D_u))$ è t.c.

$$m_f^T(\varphi) = i_{D_u}(\omega),$$

allora $\frac{1}{f}\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$ e $i_D(\frac{1}{f}\omega) = \varphi$.

$\boxed{\text{DIM}}$ Basta mostrare che $\frac{1}{f}\omega \in H^0(\Omega^1(-D))$.

Infatti in tal caso si ha:

$$m_f^T(i_D(\tfrac{1}{f}\omega)) = i_{D_u}(\omega) = m_f^T(\varphi)$$

e m_f^T iniettiva $\Rightarrow \varphi = i_D(\frac{1}{f}\omega)$.

Sia $p \in X$ fissato. Dobbiamo mostrare che

$$\operatorname{ord}_p(\tfrac{1}{f}\omega) - D(p) \geq 0.$$

Sia U_1 intorno aperto di p t.c.

- $(\operatorname{Supp} D) \cap (U_1 \setminus p) = \emptyset$
- $q \notin U_1 \setminus \{p\}$
- $f \in \mathcal{O}^*(U_1 \setminus \{p\})$

. z coord. locale in U_1, centrata in p
. ω è olomorfa e mai nulla in $U_1 \setminus \{p\}$.

Nota: $\varphi \neq 0 \Rightarrow m_f^T(\varphi) \neq 0 \Rightarrow i_{D_u}(\omega) \neq 0$
$\Rightarrow \omega \neq 0$.

In U_1 si ha $\omega = f(z)\, dz$

$\frac{1}{z f(z)} \in \mathcal{O}(U_1 \setminus \{p\})$ determina $\xi \in H^1(D_u)$

t.c. $i_{D_u}(\omega)(\xi) \neq 0$

$$\overset{\|}{m_f^T(\varphi)(\xi)} = \varphi(f \cdot \xi)$$

$\Rightarrow \underbrace{f \cdot \xi}_{\text{rappresentato dal cociclo: } \frac{f(z)}{z f(z)}} \neq 0$ in $H^1(\mathcal{O}(D))$ in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$

$\Rightarrow$ questo cociclo non può essere un cobordo.

Per assurdo: supp. che $\mathrm{ord}_p(\frac{1}{f}\omega) < D(p)$.

Abbiamo: $\mathrm{ord}_p\left(\frac{f}{z f(z)}\right) = \mathrm{ord}_p f - \mathrm{ord}_p g - 1 > -D(p) - 1$

cioè: $\mathrm{ord}_p\left(\frac{f}{z f(z)}\right) \geq -D(p)$

$\mathrm{ord}_p(\frac{1}{f}\omega) = \mathrm{ord}_p \omega - \mathrm{ord}_p f = \mathrm{ord}_p g - \mathrm{ord}_p f$

cioè: $\mathrm{ord}_p f - \mathrm{ord}_p g > -D(p)$.

$\Rightarrow \frac{f}{z g(z)} \in \mathcal{O}(D)(U_1)$

$\Rightarrow \left(0, \frac{f}{z g(z)}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D))$ e ha cobordo

$$\frac{1}{2g(2)} \quad 4 .$$ $\boxed{2}$

Per avere iniettività di i_D:
fissato $\varphi \in H^1(\mathcal{O}_X(D))$, $\varphi \neq 0$, dobbiamo trovare n e $f \in H^0(\mathcal{O}_X(nq))$ opportuni t.c.
$$m_f^T(\varphi) \in \operatorname{Im} i_{D_n}.$$

Abbiamo:
$$h^0(\Omega^1_X(-D_n)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D_n))$$
$$\geq 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + 2g - 2 - \deg D_n \qquad (D_n = D - n$$
$$= 2g - 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + n - \deg D$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} i_{D_n} \geq 2g + n - 1 - h^1(\mathcal{O}_X) - \deg D.$$

Inoltre: $\deg D_n = \deg D - n$
$\Rightarrow$ se $n > \deg D$, allora $\deg D_n < 0$
$$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D_n)) = 0$$
$$\Rightarrow -h^1(\mathcal{O}_X(D_n)) = 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + \deg D - n$$
cioè $h^1(\mathcal{O}_X(D_n)) = n + h^1(\mathcal{O}_X) - 1 - \deg D.$

$\Rightarrow$ la codimensione di $\operatorname{Im} D_n$ in $H^1(\mathcal{O}(D_n))^*$ è
$$\leq \cancel{n} + h^1(\mathcal{O}_X) \cancel{-1} \cancel{-\deg D} - 2g \cancel{-n} \cancel{+1} + h^1(\mathcal{O}_X) \cancel{+\deg D}$$
$$= \underbrace{2h^1(\mathcal{O}_X) - 2g}_{\text{non dipende da } n}$$

Fissato φ consideriamo

$$\psi : H^0(\mathcal{O}_X(nq)) \to H^1(\mathcal{O}_X(D_n))^*$$
$$f \mapsto m_f^T(\varphi) = \varphi \circ m_f .$$

- ψ è lineare
- ψ è iniettiva, infatti se $f \neq 0$ allora m_f^T è iniettiva $\Rightarrow m_f^T(\varphi) \neq 0$

Sia $\Lambda := \operatorname{Im} \psi$.

$\dim \Lambda = h^0(\mathcal{O}_X(nq)) \geq 1 - h^1(\mathcal{O}_X) + n$

$\Rightarrow$ per $n >> 0$ $\dim \Lambda >$ Codim $\operatorname{Im} i^*_{D_n}$

$\Rightarrow \Lambda \cap \operatorname{Im} i^*_{D_n} \neq 0$

$\Rightarrow \exists f \in H^0(\mathcal{O}_X(nq))$ t.c. $m_f^T(\varphi) \in \operatorname{Im} i^*_{D_n}$

$\Rightarrow \varphi \in \operatorname{Im} i^*_D$.

A posteriori: la dualità di Serre ci dice che

$$H^1(X, \Omega^1_X) \cong \mathbb{C}$$
$$\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}$$
$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X)$$

$\Rightarrow$ la mappa

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \twoheadrightarrow H^2_{dR}(X, \mathbb{C})$$

è isomorfismo

$\Rightarrow$ in $A^2_{\mathbb{C}}(X)$ si ha:

$$\bar\partial A^{1,0}(X) = d A^1_{\mathbb{C}}(X).$$

OSS Sia X una superficie di Riemann cpta.

$$A^2_{\mathbb{C}}(X) = A^{1,1}(X)$$ tutte d-chiuse e $\bar\partial$-chiuse

$$H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{d A^1(X)}$$ (de Rham)

$$\cong$$
$$\mathbb{C}$$

$$H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$
$$[\omega] \mapsto \int_X \omega$$

$\rightsquigarrow$ ω è d-esatta $\Longrightarrow \int_X \omega = 0$.

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{\{2\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\}} = \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^{1,0}(X)}$$

Nota: se η è una 1-forma di tipo $(1,0)$

$$\partial\eta = 0 \Longrightarrow d\eta = \bar\partial\eta$$

$$\Rightarrow \{2\text{-forme } \bar\partial\text{-esatte}\} = d A^{1,0}(X)$$

$$A^{1,0}(X) \subseteq A^1(X) \Longrightarrow d A^{1,0}(X) \subseteq dA^1(X)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^{1,0}(X)} \twoheadrightarrow \frac{A^2_{\mathbb{C}}(X)}{dA^1(X)}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ H^{1,1}_{\bar\partial}(X) & & H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \overset{\text{integrale}}{\cong} \mathbb{C} \end{array}$$

Dal teorema di Dolbeault:

$$H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \cong H^1(X, \Omega^1_X) \overset{\text{Serre}}{\cong} H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ la mappa $\quad H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \to H^2_{dR}(X,\mathbb{C})$

$$[\omega]_{\bar\partial} \mapsto [\omega]_d$$

è <u>isomorfismo</u>,

e concludiamo che per $\omega \in A^2_{\mathbb{C}}(X)$ si ha:

ω è d-esatta $\Leftrightarrow$ ω è $\bar\partial$-esatta

$$\Leftrightarrow \int_X \omega = 0.$$

<u>Decomposizione di Hodge</u>.

Sia X una varietà complessa compatta <u>proiettiva</u> (sempre vero se $\dim X = 1$)

Ricordiamo che:

$$H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\{k\text{-forme chiuse complesse } \mathcal{C}^\infty\}}{\{k\text{-forme esatte}\}}$$

e:

$$A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X).$$

Nota: anche se ω è chiusa, in generale 3
le sue parti di tipo (p,q) non lo sono
e la decomposizione a priori non passa in coomologia.

Definiamo

$$H^{p,q}(X) := \{ \xi \in H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C}) \mid$$

ξ ha un rappresentante ω che è di tipo (p,q).

- $H^{p,q}(X)$ è un sottospazio vettoriale di $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$
- $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$ dentro $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$

perché: se $\xi \in H^{p,q}(X)$

$\xi = [\omega]$ $\quad \omega$ d-chiusa, (p,q)

$\bar{\xi} = [\bar{\omega}]$ $\quad \bar{\omega}$ d-chiusa, (q,p)

$\Rightarrow \bar{\xi} \in H^{q,p}(X)$

Nota: il coniugio è un automorfismo $\mathbb{R}$-lineare di $H^{p+q}_{dR}(X, \mathbb{C})$

$\Rightarrow H^{p,q}(X)$ e $H^{q,p}(X)$ sono isomorfi come spazi vettoriali reali

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} H^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^{q,p}(X)$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{q,p}(X)$.

<u>OSS</u> Se ω è di tipo (p,q), allora

ω è d-chiusa $\Longrightarrow$ ω è ∂-chiusa e $\bar\partial$-chiusa.

$\boxed{\text{DIM}}$ $d\omega = \underbrace{\partial\omega}_{\text{tipo }(p+1,q)} + \underbrace{\bar\partial\omega}_{\text{tipo }(p,q+1)}$

Quindi $d\omega = 0 \Longrightarrow \partial\omega = \bar\partial\omega = 0$.

<u>Teorema</u> (decomposizione di Hodge).

X <u>proiettiva</u>.

1) Sia ω una (p,q)-forma d-chiusa. Allora sono equivalenti:

(i) ω è d-esatta

(ii) ω è ∂-esatta

(iii) ω è $\bar\partial$-esatta

2) La mappa

$$\overset{H^{p+q}_{dR}(X)}{\cup}$$

$$H^{p,q}(X) \longrightarrow H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$$

$$\xi = [\underset{(p,q)}{\omega}]_d \longmapsto [\omega]_{\bar\partial}$$

è ben definita (per l'OSS. e per 1) ed è <u>isomorfismo</u>.

3) Si ha: $$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \underbrace{\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$$ (5)

(decomposizione di Hodge).

invariante topologico di X (coomologia singolare)

dipendono da struttura complessa.

$$\dim H^{p,q}(X) = h^{p,q}(X) \quad \text{numeri di Hodge}$$
$$\| $$
$$\dim H^q(X, \Omega^p_X)$$

$$\boxed{h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)}$$ simmetria

Diamante di Hodge:

$$h^{0,0} = 1$$

$$h^{1,0} \quad h^{0,1} \qquad (h^{1,0} = h^{0,1})$$

$$h^{2,0} \quad h^{11} \quad h^{0,2}$$

$$h^{n,0} \quad \dots \quad h^{0,n}$$

$$h^{n-1,0} \quad \dots \quad h^{0,n-1}$$

$$\vdots$$

$$h^{n,n} = 1$$

$$\underbrace{b_k(X)}_{\text{numero di Betti}} = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X)$$

$b_1(X) = 2h^{0,1}(X)$ pari

$\Longrightarrow$ i numeri di Betti di indice dispari di X sono sempre pari.

Dualità di Poincaré:

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) \times H^{2n-k}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

non degenere

$$\leadsto b_k(X) = b_{2n-k}(X)$$

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

$$H^{2n-k}_{dR}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{a+b=2n-k} H^{a,b}(X) =$$

$$\begin{matrix} p = n-a & \quad a = n-p \\ q = n-b & \quad b = n-q \end{matrix}$$

$$= \bigoplus_{p+q=k} H^{n-p,n-q}(X)$$

$$dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{j_q} \qquad p+q=k$$

$$\wedge \underbrace{\omega}_{2n-k \text{ forme}}$$

l'unico pezzo che non muore

è $\omega_{n-p,\,n-q}$

⇝ la dualità di Poincaré induce una dualità

$$H^{p,q}(X)\times H^{n-p,n-q}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$$

⇝ $h^{p,q}(X) = h^{n-p,n-q}(X)$

ulteriore simmetria.

ES. Se X è una superficie di Riemann cpta:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{array} \qquad h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) = g$$

$$b_1 = 2g$$

$$\rightarrow \underbrace{H^1_{dR}(X,\mathbb{C})}_{\dim 2g} = \underbrace{H^{1,0}(X)}_{g} \oplus \underbrace{H^{0,1}(X)}_{g}$$

Esercizio X sup. di R. cpta

Sia $\phi : \Omega^1(X) \to H^1_{dR}(X, \mathbb{C})$

$\omega \mapsto [\omega]_d$

1) Mostrare che ϕ è ben definita, iniettiva, e che $\operatorname{Im} \phi = H^{1,0}(X)$

2) Dedurre che $\forall \xi \in H^1_{dR}(X, \mathbb{C})$

$\exists !\ \omega, \eta \in \Omega^1(X)$ t.c.

$$\xi = [\omega + \bar{\eta}]_d .$$

Sistemi lineari su ~~spazi~~ superfici di Riemann.

Sia X una sup. di Riemann cpta e D un divisore su X.

<u>Def</u> Il SISTEMA LINEARE COMPLETO associato a D è

$$|D| := \{ \underbrace{E \in \mathrm{Div}(X) \mid E \geq 0}_{\text{"effettivo"}} ,\ E \sim D \}$$

- divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso sistema lineare
- $\forall E \in |D|$, $|E| = |D|$
- $|D| = \emptyset$ se D non è lin. equiv. a divisori