Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 25 gennaio 2016

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme degli intervalli semichiusi della forma $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, che indichiamo con $\mathcal{T}$.
2. Dimostrare che le semirette della forma $(-\infty, a)$ e $[a, +\infty)$ sono aperte nella topologia $\mathcal{T}$.
3. Sia Z un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ connesso nella topologia $\mathcal{T}$. Dimostrare che Z è formato da un solo punto.

Esercizio 2. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea):

- $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{Q},\ 0 \leq y \leq 1\}$
- $P = (\pi/4, 1/2)$

e poniamo

$$X = I \cup C, \qquad Y = X \cup P = I \cup C \cup P$$

1. Dimostrare che X e Y sono di Hausdorff.
2. Dimostrare che X è connesso per archi.
3. Dimostrare che Y è connesso.
4. Y è connesso per archi?

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea. Poniamo $Z = X \times \{0\} \subseteq X \times I$. Indichiamo con Y il quoziente $(X \times I)/Z$ (cioè modulo la relazione di equivalenza che identifica Z ad un punto). Lo spazio Y viene solitamente chiamato il *cono* su X.

1. Dimostrare che Y è connesso per archi.

2. Dimostrare che Y è contraibile.

3. Dimostrare che se X è compatto allora Y è compatto

4. Dimostrare che se X è compatto e di Hausdorff, allora Y è di Hausdorff.

Esercizio 4. Sia $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco chiuso di centro l'origine e raggio 1 e sia S^1 il suo bordo. Sia inoltre $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$ dotato della topologia discreta. (F_n è un insieme formato da n punti con la topologia discreta). Poniamo, per $n \geq 2$

$$X_n = (D^2 \times F_n)/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \in S^1$$

1. Dimostrare che X_2 è omeomorfo alla sfera S^2 (e quindi X_2 è connesso e semplicemente connesso).

2. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è connesso per ogni $n \geq 2$.

3. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 5. Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,c^{-1}\,e^{-1}\,b^{-1}\,d^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 6. Sia A una matrice quadrata complessa con polinomio caratteristico

$$c_A(t) = (t-2)^2(t-3)^3(t-4)^4$$

e (esattamente) cinque autovettori linearmente indipendenti.

Determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date. Per ognuna delle forme trovate, indicare il polinomio minimo corrispondente.