Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercizi di preparazione allo scritto – a.a. 2015-16

Topologia

Esercizio 1. Dimostrare che

1. $d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ definisce una distanza su $\mathbb{R}^n$.
2. $d(x,y) = \min_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ **non** definisce una distanza su $\mathbb{R}^n$.
3. per $x, y \in \mathbb{R}^2$ definiamo $d(x,y) =$ il più piccolo numero intero maggiore o uguale alla distanza euclidea fra x e y. La funzione d è una distanza su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 2. Sia X un insieme e siano d_1 e d_2 due distanze su X. Dimostrare che:

1. se esiste un numero reale $c > 0$ tale che $d_1(x,y) \leq cd_2(x,y)$ per ogni $x, y \in X$ allora l'identità $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ è una funzione continua
2. se esistono due numeri reali positivi c, c' tali che

$$d_1(x,y) \leq cd_2(x,y), \qquad d_2(x,y) \leq c'd_1(x,y) \qquad \forall\, x, y \in X$$

allora (X, d_1) e (X, d_2) sono spazi topologici omeomorfi.

Esercizio 3.

1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon < 1\}$$

delle palle aperte di raggio minore di 1 e centro arbitrario è una base per la topologia indotta dalla distanza.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e poniamo $e(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$. Dimostrare che $e(x,y)$ è una distanza su X.
3. Dimostrare che le distanze d ed e inducono su X la stessa topologia. (Suggerimento: quali sono le palle aperte di raggio minore di 1 nelle due metriche?)

Ricordando che uno spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se esiste un numero reale positivo M tale che $d(x,y) \leq M$ per ogni $x, y \in X$, questo esercizio dimostra che ogni spazio metrico è omeomorfo ad uno spazio metrico limitato.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Ricordiamo che la frontiera di Y è definita come $\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{(X - Y)}$. Dimostrare che

1. $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$
2. Y è chiuso se e solo se $\partial Y \subseteq Y$
3. Y è aperto se e solo se $\partial Y = \overline{Y} - Y$
4. $\partial Y = \emptyset$ se e solo se Y è sia aperto che chiuso
5. Y è la chiusura di un aperto se e solo se y è la chiusura del suo interno

Esercizio 5. Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = \emptyset \text{ oppure } A = \mathbb{R} \text{ oppure } A = (-\infty, a), a \in \mathbb{R}\}$$

1. dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia
2. dimostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua nella topologia $\mathcal{T}$ se e solo se
   a. f è crescente, cioè $x < y \implies f(x) \leq f(y)$, e
   b. f è continua a destra nel senso usuale, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \leq y < x + \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon$ (questa condizione si può anche scrivere $\lim_{y \to x^+} f(y) = f(x)$)

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e sia

$$G(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ omeomorfismo}\}$$

1. Dimostrare che G è un gruppo
2. Per $x \in X$, poniamo $G_x = \{f \in G(X) \mid f(x) = x\}$. Dimostrare che G_x è un sottogruppo di $G(X)$.

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $A \subseteq Y$. Indichiamo con $\mathrm{cl}_X(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di X e con $\mathrm{cl}_Y(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di Y (nella topologia indotta di sottospazio).

1. Dimostrare che $\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.
2. Dare un esempio per mostrare che in generale $\mathrm{cl}_Y(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$.
3. Determinare una condizione *necessaria* su Y in modo che per ogni $A \subseteq Y$ si abbia $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A)$.
4. La condizione determinata è anche *sufficiente*?

Esercizio 8. Sia X un insieme e sia G un gruppo. Ricordiamo che un'*azione* di G su X è una funzione $\Phi : G \times X \to X$, denotata con $\Phi(g, x) = g \cdot x$ tale che

1. $e \cdot x = x$ per ogni $x \in X$, dove $e \in G$ è l'elemento neutro
2. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, per ogni $x \in X$, per ogni $g, h \in G$

Dimostrare che

1. Poniamo $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. Dimostrare che G_x è un sottogruppo di G, detto lo *stabilizzatore* di x.
2. Poniamo $G \cdot x = \{z \in X \mid z = g \cdot x, \text{ per qualche } g \in G\}$, detta l'*orbita* di x. Dimostrare che per $x, y \in X$ le orbite di x e y sono disgiunte oppure coincidono. Concludere che X è unione disgiunta delle orbite.

Esercizio 9. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sull'insieme prodotto $X \times Y$ definiamo

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

1. Dimostrare che d è una distanza su $X \times Y$.
2. Dimostrare che la topologia indotta dalla distanza d su $X \times Y$ è la topologia prodotto (cioè il prodotto delle topologie indotte dalle distanze d_X su X e d_Y su Y).

Esercizio 10. Trovare uno spazio topologico non vuoto X tale che X sia omeomorfo a $X \times X$.

Suggerimento: provare con X insieme infinito con la topologia discreta. Fatto questo, trovare un X che non abbia la topologia discreta.

Esercizio 11. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è continua (nella topologia euclidea) se e solo se il grafico di f è compatto.

Trovare un esempio di funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ discontinua il cui grafico sia chiuso (ma non compatto, naturalmente).

Esercizio 12. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e ∞ un elemento che non appartiene ad X. Poniamo $X^\infty = X \cup \{\infty\}$. Definiamo una famiglia $\mathcal{T}^\infty$ di sottoinsiemi di X^∞ come

$$V \in \mathcal{T}^\infty \iff \begin{cases} V \in \mathcal{T} & \text{oppure} \\ V = U \cup \{\infty\} \text{ e } X - U \text{ è chiuso e compatto in } X \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. $\mathcal{T}^\infty$ è una topologia per X^∞
2. X^∞ è compatto in questa topologia
3. considerando $X \subset X^\infty$, la topologia di sottospazio su X è $\mathcal{T}$.

Esercizio 13. Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X?

Esercizio 14. Sia $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria (pensata come numeri complessi di norma 1) e sia $X = S^1 \times [0,1]$. Definiamo la seguente relazione su X

$$(x,t) \sim (y,s) \iff tx = sy$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco unitario chiuso $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Esercizio 15. Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.

Esercizio 16. Sia X uno spazio compatto di Hausdorff e sia $U \subseteq X$ un aperto diverso da X. Dimostrare che U^∞ è omeomorfo allo spazio quoziente $X/(X-U)$.

Suggerimento: sia $p : X \to X/(X-U)$ la proiezione sul quoziente e considerare la funzione $h : U^\infty \to X/(X-U)$ data da $h(u) = p(u)$ per $u \in U$ e $h(\infty) = p(X-U)$. Dimostrare che h è un omeomorfismo.

Esercizio 17. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che ogni sottospazio compatto K di X è chiuso e limitato (K limitato significa che esiste $x \in X$ e un numero reale $M > 0$ tale che $K \subseteq B_K(x)$, la palla di centro x e raggio M).

Esercizio 18. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio con almeno due punti distinti con la topologia discreta. Dimostrare che X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante.

Esercizio 19. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X non è connesso se e solo se esiste una funzione $f : X \to \{0,1\}$ *continua e suriettiva.* (Lo spazio $\{0,1\}$ ha la topologia discreta).

Esercizio 20. Sia $X = A \cup B$, dove A e B sono connessi. Supponiamo che $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Dimostrare che X è connesso.
(Suggerimento: usare il risultato dell'esercizio precedente).

Esercizio 21. Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se gli unici sottospazi connessi sono i punti. Dimostrare che se X ha la topologia discreta, allora X è totalmente sconnesso. Trovare un esempio di spazio totalmente sconnesso che non ha la topologia discreta.

Esercizio 22. Siano X e Y due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0,1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x,y,t) \sim (x',y',t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1,1\}$ la sfera di dimensione 0 e S^1 la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?

Esercizio 23. Sia X un insieme e siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$ due topologie tali che $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ (cioè $\mathcal{U}$ è più fine di $\mathcal{T}$). Supponiamo che $(X,\mathcal{U})$ sia compatto e $(X,\mathcal{T})$ sia di Hausdorff. Dimostrare che $\mathcal{T} = \mathcal{U}$.

Esercizio 24. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Sia $C \subseteq X$ un sottospazio connesso tale che C interseca sia A che $X - A$. Dimostrare che C interseca ∂A, la frontiera di A.
(Ricordiamo che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$).

Esercizio 25. Siano X e Y due spazi topologici, $X = U \cup V$ e sia $f : X \to Y$ una funzione tale che le restrizioni $f_{|U}$ e $f_{|V}$ siano continue.

1. Se U e V sono aperti in X, dimostrare che f è continua.
2. Se U e V sono chiusi in X, dimostrare che f è continua.
3. Dare un esempio in cui U e V non sono entrambi aperti o entrambi chiusi in X e f non è continua.

Esercizio 26. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia dei complementari finiti. La successione $a_n = 1/n$ converge? Se sì a quale (o quali) punti?