

**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**  
**Foglio di esercizi n. 1 – a.a. 2016-17**

Da consegnare: martedì 11 ottobre

Non tutti gli esercizi hanno la stessa difficoltà. In particolare, gli esercizi 4. e 5. possono richiedere un po' di tempo per trovare una soluzione.

**Esercizio 1.** Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato (e cioè la relazione  $\leq$  è riflessiva, antisimmetrica e transitiva). Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di  $x \in X$ , una base di una topologia.

**Esercizio 2.** Sul piano  $\mathbb{R}^2$  si consideri la famiglia  $\mathcal{T}$  formata dall'insieme vuoto, da  $\mathbb{R}^2$  e da tutti i dischi aperti (senza bordo)  $\{x^2 + y^2 < r^2\}$ , per  $r > 0$ . Dimostrare che  $\mathcal{T}$  è una topologia e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione  $xy = 1$ .

**Esercizio 3.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon < 1\}$$

delle palle aperte di raggio minore di 1 e centro arbitrario è una base per la topologia indotta dalla distanza.

**Esercizio 4.** Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso (in particolare, tutti i punti sono chiusi). Dimostrare che uno spazio topologico  $X$  è **T1** se e solo se per ogni  $x \in X$  si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

(l'intersezione di tutti gli intorni di un punto è solo il punto stesso).

Dimostrare che ogni spazio metrico è **T1**.

**Esercizio 5.** Due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di uno spazio topologico  $X$  si dicono **separati** se

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$$

Dimostrare che:

1. Se  $F, G \subseteq X$  sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora  $A = F - G$  e  $B = G - F$  sono separati.
2. Se  $A, B \subseteq X$  sono separati, allora  $A$  e  $B$  sono entrambi aperti e chiusi in  $A \cup B$ .

**Esercizio 6.** Sia  $X$  uno spazio metrico. Dimostrare che una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.

Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico con una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.