Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 14 settembre 2016

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. (5 punti) Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X?

Esercizio 2. Siano X e Y spazi topologici, siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue e poniamo $Z = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

1. (2 punti) Mostrare che se Y è di Hausdorff allora Z è chiuso in X.

2. (4 punti) Mostrare che se Y non è di Hausdorff si possono sempre trovare uno spazio X e due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tali che Z non sia chiuso (Suggerimento: considerare $X = Y \times Y$).

Esercizio 3. (6 punti) Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.

Mostrare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è localmente costante, allora f è costante. (Suggerimento: fissare $x \in X$ e dimostrare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.)

Esercizio 4. (5 punti) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equaizone

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot ((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

con la topologia di sottospazio.

1. (1 punto) Descrivere lo spazio X.
2. (4 punti) Dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 5. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = b^{-1}\, c\, b\, a^{-1}\, f^{-1}\, e\, a\, d\, f\, d^{-1}\, c^{-1}\, e^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 6. (6 punti) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\exp(A)$.