Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 7 luglio 2016

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. (5 punti) Consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A \in \mathcal{T} \iff [x \in A \implies -x \in A]$$

(cioè $A \in \mathcal{T}$ se e solo se A è simmetrico rispetto allo 0).

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. (2 punti) Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se A è chiuso.
3. (2 punti) Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è né più fine né meno fine della topologia euclidea.

Esercizio 2. (6 punti) Sia X uno spazio topologico.

1. (3 punti) Se $A, B \subseteq X$ dimostrare che
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2. (2 punti) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, dimostrare che
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

3. (1 punto) Sia $A_i = (1/i, 1) \subset \mathbb{R}$, con la topologia euclidea ($i \in \mathbb{N} - \{0\}$). Dimostrare che per questa famiglia l'inclusione precedente è stretta.

Esercizio 3. (6 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Dimostrare che S è compatto se e solo se ogni funzione $f : S \to \mathbb{R}$ continua ammette massimo.

Suggerimento: ricordare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esercizio 4. (5 punti) Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Supponiamo che X sia connesso per archi. Dimostrare che anche Y è connesso per archi.

Esercizio 5. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = g^{-1}\, a\, c^{-1}\, d\, f\, e\, b^{-1}\, d^{-1}\, c\, a^{-1}\, e^{-1}\, g\, f^{-1}\, b$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 6. (6 punti) Sia A una matrice quadrata complessa di ordine n tale che $A^2 = A$ (per esempio, $A =$ matrice identità oppure $A =$ matrice nulla).

1. (2 punti) Scrivere almeno due esempi espliciti per $n = 3$ di matrici A diverse dalla matrice identità e dalla matrice nulla e tali che $A^2 = A$.
2. (2 punti) Dimostrare che A è diagonalizzabile.
3. (2 punti) Con un ragionamento simile al punto precedente, dimostrare che anche una matrice per cui $A^3 = A$ è diagonalizzabile.