Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 3 – a.a. 2016-17

Da consegnare: martedì 25 ottobre

Esercizio 1. Sia X con la topologia discreta. Dimostrare che se X è compatto, allora X è finito.

Esercizio 2. (Esercizio 3, compito del 15 giugno 2016) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è continua (nella topologia euclidea) se e solo se il grafico di f è compatto.

Trovare un esempio di funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ discontinua il cui grafico sia chiuso (ma non compatto, naturalmente).

Esercizio 3. Sia X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Poniamo

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid \infty \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

Dopo aver verificato che $\mathcal{T}$ è una topologia su X, dimostrare che X è compatto e di Hausdorff.

Esercizio 4. (Esercizio 3, compito del 7 luglio 2016) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Dimostrare che S è compatto se e solo se ogni funzione $f : S \to \mathbb{R}$ continua ammette massimo. Suggerimento: ricordare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esercizio 5.

1. Sia X un insieme infinito (per esempio, $X = \mathbb{N}$) con la topologia discreta. Dimostrare che X è omeomorfo a $X \times X$.
2. Se X ha la topologia banale, è ancora vero che X è omeomorfo a $X \times X$?
3. Trovare un altro esempio di spazio X omeomorfo a $X \times X$ in cui X non abbia la topologia discreta o la topologia banale.

Esercizio 6. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice

1. **limitato** se esiste un numero reale $R > 0$ tale che A è contenuto in una palla aperta di raggio R;
2. **totalmente limitato** se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di A composto da palle aperte di raggio ϵ.

Dimostrare che:

1. A totalmente limitato $\implies$ A limitato;
2. se $X = \mathbb{R}^n$ allora A limitato $\implies$ A totalmente limitato;
3. A compatto $\implies$ A chiuso e totalmente limitato:
4. se $X = \mathbb{Q}$ (con la metrica indotta dalla metrica di $\mathbb{R}$) allora
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$
è chiuso e totalmente limitato ma non è compatto.