

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Cinq lettres sur la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 261-273.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__261_1

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

CINQ LETTRES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

I. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

J'ai lu avec intérêt les arguments que tu opposes (2^e Cahier du tome LX des *Mathematische Annalen*) à la démonstration de M. Zermelo parue dans le Tome précédent. Je ne partage cependant pas ton opinion à ce sujet. Je n'admets pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à M. Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numéroter les éléments de l'ensemble les uns après les autres, ce numérotage étant poursuivi *transfiniment*. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas : le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successifs dont chacun dépend des précédents; c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle M. Zermelo, lesquels sont *indépendants les uns des autres*.

C'est d'ailleurs dans le cas d'une infinité *non dénombrable* de choix que tu récusés cette manière d'opérer; mais, à mon tour, je ne vois pas de différence, à cet égard, entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable. La diffé-

rence serait manifeste s'il y avait une dépendance quelconque entre les choix en question, parce qu'il faudrait alors avoir égard à l'ordre dans lequel on les opérerait : elle me paraît, encore une fois, s'évanouir complètement dans le cas des choix indépendants.

Ce qui est certain, c'est que M. Zermelo ne donne aucun moyen d'exécuter *effectivement* l'opération dont il parle, et qu'il reste douteux que personne puisse, dans la suite, indiquer ce moyen. Il aurait été assurément plus intéressant de résoudre le problème sous cette forme; mais la question ainsi posée (détermination effective de la correspondance cherchée) n'en est pas moins complètement distincte de celle que nous examinons (une telle correspondance existe-t-elle?): il y a entre elles toute la différence, laquelle est fondamentale, qui existe entre ce que M. Tannery (1) appelle une *correspondance* qui peut être *définie* et une correspondance qui peut être *décrite*. Plusieurs questions importantes de Mathématiques changeraient totalement de sens, et de solutions, si l'on substituait le second mot au premier. Tu emploies des correspondances dont tu constates l'*existence* sans pouvoir cependant les *décrire*, dans ton important raisonnement relatif aux séries qui admettent leur cercle de convergence comme coupure : si l'on se bornait aux séries entières dont la loi de formation peut être décrite, l'opinion ancienne (à savoir, que les séries entières admettant leur cercle de convergence comme coupure sont l'exception) devrait, à mon sens, être considérée comme la vraie. C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est, pour reprendre ton expression, « en dehors des Mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit, c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me paraît aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante :

A. *Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne*

(1) *Revue générale des Sciences*, t. VIII, 1897, p. 133 et suiv.

sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers,

l'est à celle-ci :

B. *Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x , y n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers.*

. On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question. — J. HADAMARD.

II. — Lettre de M. Baire à M. Hadamard.

Borel me communique la lettre où vous lui exposez votre manière de voir sur le grand débat soulevé par la Note Zermelo. Je vous demande la permission de vous adresser quelques réflexions qu'elle me suggère.

Je suis, vous le savez, de l'avis de Borel, en gros, et si je m'en écarte, ce sera pour aller plus loin que lui.

Supposons qu'on fasse un effort pour essayer d'appliquer la méthode de Zermelo à l'ensemble M des suites d'entiers positifs. On prend dans M un élément distingué m_1 ; reste l'ensemble $M - m_1$, dans lequel on prend un élément distingué m_2 ; etc. Ces choix successifs dépendent bien chacun de ceux qui le précèdent. Mais, dites-vous avec M. Zermelo, les choix sont indépendants les uns des autres, parce qu'il admet comme point de départ *un choix d'élément distingué fait dans toute partie de M* . Ceci ne me paraît pas satisfaisant : c'est, pour moi, dissimuler la difficulté *en la noyant dans une difficulté plus grande*.

L'expression *ensemble donné* est employée à chaque instant : a-t-elle un sens? Pas toujours, selon moi. Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente*, avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel*,

c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent ultérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention*, d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons l'ensemble des suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données*. A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble.

M. Zermelo dit : « Concevons qu'à tout ensemble partiel de M corresponde un de ses éléments. » C'est là une conception qui n'a rien de contradictoire, d'accord. Aussi, tout ce qu'il démontre pour moi, c'est que nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordonnés. Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Dans ce qui précède, je ne suis arrivé que bien incomplètement à rendre ma pensée. J'ai dit ma manière de voir dans la phrase qu'a bien voulu transcrire Borel dans sa Note. Pour moi, le progrès, dans cet ordre d'idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. — R. BAIRE.

III. — *Lettre de M. Lebesgue à M. Borel.*

Vous me demandez mon opinion sur la Note de M. Zermelo (*Math. Annalen*, t. LIX) sur les objections que vous lui avez faites (*Math. Annalen*, t. LX) et sur la lettre de M. Hadamard que vous me communiquez; la voici. Excusez moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Tout d'abord je suis d'accord avec vous pour ceci : M. Zermelo a très ingénieusement démontré que l'on savait résoudre le problème A :

A. *Mettre un ensemble M sous forme bien ordonnée,*

toutes les fois qu'on savait résoudre le problème B :

B. *Faire correspondre à chaque ensemble M' formé avec des éléments de M un élément particulier m' de M'.*

Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

Je doute fort qu'on puisse donner une solution générale de ce problème, du moins si l'on admet, avec M. Cantor, que définir un ensemble M c'est nommer une propriété P appartenant à certains éléments d'un ensemble N précédemment défini et caractérisant, par définition, les éléments de M. En effet, avec cette définition, on ne sait rien sur les éléments de M d'autre que ceci : ils possèdent tous les propriétés *inconnues* des éléments de N et ce sont les seuls qui ont la propriété P *inconnue*. Rien là-dedans ne permet de distinguer deux éléments de M, encore moins de les classer comme il faudrait le faire pour résoudre A.

Cette objection, faite *a priori* à tout essai de solution de A, tombe évidemment si l'on particularise N ou P; l'objection tombe, par exemple, si N est l'ensemble des nombres. Tout ce que l'on peut espérer faire de général, c'est indiquer des problèmes, tels que B, dont la résolution entraînerait celle de A et possibles dans certains cas, particuliers, mais qui se rencontrent fréquemment. D'où l'intérêt, à mon avis, du raisonnement de M. Zermelo.

Je crois que M. Hadamard est plus fidèle que vous à la pensée de M. Zermelo en interprétant la Note de cet auteur comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution. La question revient à celle-ci, peu nouvelle : *peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir?*

C'est évidemment une affaire de convention; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement *qu'en admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant*. A ce point de vue, voisin de celui de Kronecker et de M. Drach, il n'y a pas à distinguer entre A et le problème C :

C. *Tout ensemble peut-il être bien ordonné?*

Je n'aurais rien de plus à dire si la convention que j'ai indiquée était universellement admise; mais je dois avouer que l'on emploie souvent, et que j'ai moi-même souvent employé, le mot *existence* dans d'autres sens. Par exemple, lorsqu'on interprète un raisonnement bien connu de M. Cantor en disant : *il existe une infinité non dénombrable de nombres*, on ne donne cependant pas le moyen de nommer une telle infinité. On montre seulement, vous l'avez dit avant moi, que, chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de nombres, on pourra définir un nombre ne faisant pas partie de cette infinité. (Le mot *définir* a tout le temps le sens de : *nommer une propriété caractéristique du défini*). Une existence de cette nature peut être utilisée dans un raisonnement et de la manière suivante : une propriété est vraie, si, la nier, conduit à admettre qu'on peut ranger tous les nombres en suite dénombrable. Je crois qu'elle ne peut intervenir que de cette manière.

M. Zermelo utilise l'*existence* d'une *correspondance* entre les sous-ensembles de M et certains de leurs éléments. Vous voyez que, quand même l'existence de ces correspondances serait hors de doute, suivant la manière dont cette existence aurait été prouvée, il ne serait pas évident qu'on ait le droit d'utiliser cette existence comme le fait M. Zermelo.

J'arrive au raisonnement que vous énoncez ainsi : « Il est possible, dans un ensemble particulier M' , de choisir *ad libitum* l'élément distingué m' ; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M' , peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », et duquel semble résulter l'existence des correspondances.

Tout d'abord, M' étant donné, est-il évident qu'on puisse choisir m' ? Cela serait évident si M' existait, au sens presque kroneckérien que j'ai dit, puisque dire que M' existe serait alors affirmer que l'on sait nommer certains de ses éléments. Mais étendons le sens du mot *exister*. L'ensemble Γ des correspondances entre les sous-ensembles M' et les éléments distingués m' *existe* certainement pour MM. Hadamard et Zermelo; ce dernier représente même le nombre de ses éléments par un produit transfini. Cependant, sait-on choisir un élément de Γ ? Non, évidemment, puisque ce serait donner de B , pour M , une solution déterminée.

Il est vrai que j'emploie le mot *choisir* dans le sens de *nommer* et qu'il suffit peut-être pour le raisonnement de M. Zermelo que

choisir signifie *penser à*. Mais il faut cependant remarquer qu'on n'indique pas celui auquel on pense et qu'il est néanmoins nécessaire au raisonnement de M. Zermelo qu'on pense à *une correspondance déterminée toujours la même*. M. Hadamard croit, il me semble, qu'il n'est pas nécessaire qu'on démontre qu'on peut *déterminer* un élément (et un seul); c'est de là, à mon avis, que viennent les différences d'appréciation.

Pour mieux vous faire sentir la difficulté que je vois, je vous rappelle que, dans ma thèse, j'ai démontré l'existence (sens non kroneckérien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables B, mais il restait douteux pour moi qu'on pût jamais en nommer un. Dans ces conditions, aurais-je eu le droit de fonder un raisonnement sur cette hypothèse : *je suppose choisi un ensemble mesurable non mesurable B*, alors que je doutais que personne pût jamais en nommer un?

Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci « dans un M' déterminé je puis choisir un m' déterminé », puisqu'il existe des ensembles (l'ensemble C par exemple, qu'on pourrait considérer comme un ensemble M' provenant d'un ensemble plus général) dans lesquels il est peut-être impossible de choisir un élément. Il y a ensuite la difficulté que vous signalez relative à l'infinité des choix, ce qui fait que, si l'on veut considérer le raisonnement de M. Zermelo comme tout à fait général, il faut admettre qu'on parle d'une infinité de choix, infinité de puissance peut-être très grande; on ne donne d'ailleurs ni la loi de cette infinité, ni la loi d'un des choix; on ne sait pas s'il est possible de nommer une loi définissant un ensemble de choix ayant la puissance de l'ensemble des M' ; on ne sait pas s'il est possible, étant donné un M' , de nommer un m' .

En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens (en tant que théorème d'existence de la solution de C, seulement, bien entendu).

Vous faites allusion à ce raisonnement : « Pour bien ordonner un ensemble il suffit d'y choisir un élément, puis un autre, etc. » Il est certain que ce raisonnement présente des difficultés énormes, plus grandes encore, au moins en apparence, que celui de M. Zermelo; et je suis tenté de croire avec M. Hadamard qu'il y a progrès

à avoir remplacé une infinité de choix successifs et dépendant les uns des autres par une infinité, non ordonnée, de choix indépendants. Il n'y a peut-être là qu'une illusion et la simplification apparente tient peut-être seulement à ce que l'on doit remplacer une infinité ordonnée de choix par une infinité non ordonnée, mais de puissance plus grande. De sorte que le fait qu'on peut ramener à la seule difficulté, placée au début du raisonnement de M. Zermelo, toutes les difficultés du raisonnement simpliste que vous citez prouve peut-être simplement que cette seule difficulté est très grande. En tout cas, elle ne me paraît pas disparaître parce qu'il s'agit d'un ensemble non ordonné de choix indépendants. Par exemple, si je crois à l'existence de fonctions $y(x)$ telles que, quel que soit x , y ne soit jamais lié à x par une équation algébrique à coefficients entiers, c'est parce que je crois, avec M. Hadamard, qu'il est possible d'en construire; mais ce n'est pas, pour moi, la conséquence immédiate de l'existence, quel que soit x , de nombres y qui ne soient liés à x par aucune équation à coefficients entiers (1).

Je suis pleinement d'accord avec M. Hadamard quand il déclare que la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable. Quand on dit, comme dans le raisonnement que vous critiquez, « ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M' , peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », on ne dit rien si l'on n'explique pas les termes employés. Faire un choix, ce peut être écrire ou nommer l'élément choisi; faire une infinité de choix, ce ne peut être écrire ou nommer les éléments choisis, un à un : la vie est trop courte. Il faut donc dire ce que c'est faire. On entend par là, en général, que c'est donner la loi qui définit les éléments choisis, mais cette loi est pour moi, comme pour M. Hadamard, aussi indispensable, qu'il s'agisse d'une infinité dénombrable ou non.

Peut-être cependant suis-je encore d'accord avec vous sur ce point parce que, si je n'établis pas de différences théoriques entre

(1) En corrigeant les épreuves, j'ajoute qu'en fait le raisonnement, par lequel on légitime ordinairement l'énoncé A de M. Hadamard (p. 263), légitime en même temps l'énoncé B. Et, à mon avis, c'est parce qu'il légitime B qu'il légitime A.

les deux infinités, au point de vue pratique, je fais une grande différence entre elles. Quand j'entends parler d'une loi définissant une infinité transfinie de choix, je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois, tandis que je connais des lois définissant une infinité dénombrable de choix. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois parfois des difficultés aussi graves, à mon avis, dans des raisonnements où n'interviennent qu'une infinité dénombrable de choix que dans des raisonnements où il y en a une transfinité. Par exemple, si je ne considère pas comme établi par le raisonnement classique que tout ensemble de puissance supérieure au dénombrable contient un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des nombres transfinis de la classe II de M. Cantor, je n'attribue pas plus de valeur à la méthode par laquelle on démontre qu'un ensemble non fini contient un ensemble dénombrable. Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée. Mais je vous ai déjà parlé de ces questions. — H. LEBESGUE.

IV. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

La question me paraît tout à fait claire maintenant, après la lettre de M. Lebesgue. De plus en plus nettement, elle tient tout entière dans la distinction, exposée dans l'article de M. Tannery, entre ce qui est *déterminé* et ce qui peut être *décrit*.

Lebesgue, Baire et toi, adoptez à cet égard la manière de voir de Kronecker, que je croyais jusqu'ici lui être particulière. Vous répondez négativement à la question posée (ci-dessus, p. 263) par M. Lebesgue : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? J'y réponds affirmativement. Je prends pour mienne, autrement dit, la réponse que Lebesgue fait lui-même (p. 266) à son objection relative à l'ensemble Γ .

Qu'il *nous* soit impossible, au moins actuellement, de *nommer* un élément de cet ensemble, j'en conviens. C'est là la question pour vous; ce ne l'est pas pour moi.

Il n'y a qu'un point sur lequel il me semble que Lebesgue ne soit pas logique avec lui-même. C'est lorsqu'il se reconnaît ou ne

se reconnaît pas le droit d'utiliser une existence, suivant la manière dont elle a été démontrée. Pour moi, les *existences* dont il parle sont des faits comme les autres. Sinon, elles n'ont pas lieu.

La question se pose de même vis-à-vis de Baire. Je n'aimerais pas beaucoup la placer, comme il le fait (p. 264), à la façon de M. Hilbert, sur le terrain du *non contradictoire*, qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux. Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que nous n'apercevons pas de contradiction, etc. Cela ne se *démontre* pas, cela se *constate* : on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu.

Ce point écarté, la question principale, celle de savoir si l'ensemble peut être ordonné, n'a évidemment pas pour Baire (pas plus que pour Lebesgue et toi) le même sens que pour moi. Je dirais plutôt : l'ordination est-elle possible? (et non pas même peut-on ordonner, de crainte d'avoir à penser à ce qu'est cet *on*) : Baire dirait : pouvons-nous ordonner? Question toute subjective, à mon avis.

Ce sont donc deux conceptions des Mathématiques, deux mentalités qui sont en présence. Je ne vois, dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, aucun motif de changer la mienne. Je ne prétends pas l'imposer. Tout au plus ferai-je valoir en sa faveur les arguments que j'ai indiqués dans la *Revue générale des Sciences* (30 mars 1905), savoir :

1° Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs, sur la notion même de fonction. La *loi* qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression (1) analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. Et même à une expression analytique pas trop bizarre. Non seulement la *numérabilité* des choix ne me paraît pas changer la question, mais il en est de même de l'*unicité*. Je ne vois pas

(1) Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire.

comment nous aurions le droit de dire : « Pour chaque valeur de x il existe un nombre satisfaisant à Soit y ce nombre... », alors que, parce que « la mariée est trop belle », nous ne pouvons pas dire : « Pour chaque valeur de x il existe une infinité de nombres satisfaisant à Soit y l'un de ces nombres ... ».

2° Les choix arbitraires de Tannery conduisent à des nombres ν , que nous serions incapables de définir. Je ne conçois pas que ces nombres n'existent pas.

Quant aux raisonnements présentés par M. Bernstein (*Math. Annalen*, t. LX, p. 187), et, par conséquent, à ses objections à la démonstration de M. Zermelo, je ne les considérerais pas, pour ma part, comme probants. Cette opinion est d'ailleurs indépendante de la question que nous discutons actuellement.

M. Bernstein part du paradoxe de M. Burali-Forti (*Circolo matematico di Palermo*, 1897) relatif à l'ensemble W de tous les nombres ordinaux. Pour échapper à la contradiction mise en évidence par M. Burali-Forti, il suppose le nombre ordinal W tel qu'il soit impossible de lui ajouter 1. Cette opinion est, pour moi, inadmissible, ainsi que les arguments imaginés en sa faveur par M. Bernstein. L'ordre établi (d'après la théorie de M. Cantor) entre les éléments de W et l'élément supplémentaire (c'est à cet ordre que s'attaque l'auteur) est une pure convention, qu'on est toujours libre de faire et à laquelle les propriétés de W , quelles qu'elles soient, ne sauraient mettre aucun obstacle.

La solution est autre. C'est l'existence même de l'ensemble W qui implique contradiction. Dans sa définition, la définition générale du mot *ensemble* est incorrectement appliquée. On n'a le droit de former un ensemble qu'avec des objets préalablement existants et il est aisé de voir que la définition de W suppose le contraire.

Même observation pour *l'ensemble de tous les ensembles* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Revenons à la question primitive. Voici encore, à cet égard, non un argument, car je crois que nous coucherons éternellement sur nos positions, mais une conséquence de tes principes.

Cantor a considéré l'ensemble de toutes les fonctions qui, dans l'intervalle $(0, 1)$, ne prennent que les valeurs 0, 1. Cet ensemble a,

pour moi, un sens clair et sa puissance est 2^{\aleph} , comme l'énonce Cantor. De même, l'ensemble de toutes les fonctions de x a pour moi un sens, et je vois clairement que sa puissance est \aleph^{\aleph} .

Quel sens tout cela a-t-il pour toi? Il me paraît évident que cela ne peut en avoir aucun. Car à toute fonction tu imposes une condition supplémentaire qui n'a aucun sens mathématique : celle d'être *descriptible pour nous*.

Ou plutôt, voici ce que cela signifie : on ne doit considérer, à ton point de vue, que les fonctions définissables en un nombre fini de mots. Mais, à ce compte, les deux ensembles ainsi formés sont *dénombrables*, ainsi que tous les ensembles possibles, d'ailleurs. — J. HADAMARD.

V. — *Lettre de M. Borel à M. Hadamard.*

... Je voudrais d'abord te signaler une intéressante remarque faite par M. Lebesgue à la séance de la Société du 4 mai : Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu'aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l'élément distingué, puisqu'il ne le caractérise par rien *pour lui-même* (il ne s'agit même pas ici d'un contradicteur possible; il s'agit d'être cohérent avec soi-même).

Quant à ta nouvelle objection, voici quelle est ma situation à son égard.

Je n'aime guère écrire des alephs, mais je consens cependant à faire des raisonnements équivalents à ceux dont tu parles, sans me faire guère illusion sur leur valeur intrinsèque, *mais en les regardant comme pouvant guider pour d'autres raisonnements plus sérieux*. Comme exemple pratique, je puis te citer la Note III que j'ai insérée à la fin de mon dernier petit Livre (*Leçons sur les fonctions de variables réelles, etc.*, rédigées par Maurice Fréchet); le raisonnement qui y est employé est manifestement suggéré par le raisonnement de Cantor, que j'ai rapporté dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions* ⁽¹⁾, page 107.

(¹) Dans les Notes I et II de ce petit Livre, je fais constamment des raisonnements du type de ceux que tu me refuses le droit de faire; je suis d'ailleurs à chaque instant rempli de scrupules et chacune de ces deux Notes se termine par une phrase très restrictive.

La forme que j'adopte dans cette Note III n'est pas encore absolument satisfaisante, comme je l'indique au bas de la dernière page de mon Livre; mais le raisonnement analogue de M. Lebesgue dans son Mémoire paru dans le *Journal de Jordan* (1905) est, je crois, tout à fait irréprochable, en ce sens qu'il conduit à un résultat précis, exprimable au moyen d'un nombre fini de mots; il a cependant son origine dans celui de Cantor.

On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regarde pas comme valables absolument et qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s'ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu'on serait ainsi trop sévère et qu'ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de Physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier. Il y aurait un travail considérable à faire pour savoir quel est le sens réel et précis que l'on peut attribuer à des raisonnements de ce genre; ce travail est inutile ou du moins hors de proportion avec son utilité; les rapports avec le concret de ces raisonnements trop abstraits apparaissent d'eux-mêmes lorsque le besoin s'en fait sentir.

Je serai d'accord avec toi sur le fait qu'il est contradictoire de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car, par le raisonnement de la page 107 citée plus haut, on peut former un ensemble de puissance plus grande, mais je crois que cette contradiction tient à ce que l'on introduit des ensembles non définis réellement.

— EM. BOREL.
