Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 5 – a.a. 2016-17

Da consegnare: martedì 8 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 6.7) Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione biunivoca (qualunque!) fra i numeri naturali e i numeri razionali, cioè:

1. $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. a è iniettiva e l'immagine $a(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$.

Pensando alla funzione a come ad una successione a valori reali, determinare i punti di accumulazione.

Suggerimento (di Manetti): ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.

Abbiamo discusso a lezione la differenza fra punto di accumulazione di un sottoinsieme e punto di accumulazione per una successione. I prossimi due esercizi precisano la relazione fra le due nozioni:

Esercizio 2. (Manetti, Esercizio 6.10.) Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $x \in X$ un punto. Si dice che x è un *punto di accumulazione per* A se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x. (Questa è esattamente la definizione data nel corso di Analisi UNO).

Dimostrare che $x \in X$ è un punto di accumulazione per una successione $\{a_n\}$ se e solo se il punto $(x, 0) \in X \times [0, 1]$ è un punto di accumulazione per il sottoinsieme $A = \{(a_n, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times [0, 1]$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico, $a : \mathbb{N} \to X$ una successione e poniamo $A = a(\mathbb{N}) \subseteq X$, l'immagine della successione. Sia $p \in X$ e consideriamo le due affermazioni:

1. p è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\} \implies p$ è un punto di accumulazione per l'insieme A
2. p è un punto di accumulazione per l'insieme $A \implies p$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\}$

Determinare se le due affermazioni sono vere o false, fornendo una dimostrazione oppure un controesempio.

È possibile rendere vera una affermazione falsa aggiungendo ipotesi sullo spazio X? (per esempio, si potrebbe aggiungere X soddisfa il primo assioma o il secondo assioma di numerabilità, oppure X è compatto oppure X è uno spazio metrico ...)

Esercizio 4. (Manetti, Esercizio 10.12.) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to S^n$ due applicazioni continue. Utilizzando l'espressione algebrica

$$\frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}, \quad t \in [0, 1]$$

mostrare che se $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è omotopa a g.