Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
La curva di Peano (foglio di esercizi facoltativo) – a.a. 2016-17

Questa esercitazione riguarda la lettura del lavoro di G. Peano dal titolo "Sur un courbe, qui remplit toute une aire plane", pubblicato sulla rivista *Mathematische Annalen*, Volume 36:1, pp 157–160, nel marzo del 1890.

In esso Peano dimostra l'esistenza di due funzioni $x(t)$ e $y(t)$, definite e continue sull'intervallo $[0,1]$ tali che la funzione $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ data da $f(t) = (x(t), y(t))$ sia suriettiva. Dunque, l'immagine di f è un quadrato di area 1 nel piano e quindi non può essere racchiusa in una regione piana di area arbitrariamente piccola e non può essere chiamata una *curva.*

Questo esempio dimostra che il concetto di *curva parametrizzata* necessita, per esprimere l'idea intuitiva di curva, di una definizione che richieda più che la semplice continuità della parametrizzazione. Ipotesi opportune sono, ad esempio, "f di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti", oppure "$x(t), y(t)$ a variazione limitata".

La terminologia di Peano è sostanzialmente identica a quella moderna e non vi dovrebbero essere difficoltà di lettura. L'unico punto che può causare difficoltà è il riferimento di Peano ad una funzione *uniforme.* Per Peano ciò significa semplicemente "funzione ben definita", e cioè ciò che noi ormai chiamiamo semplicemente "funzione". L'origine del termine usato da Peano sta nella contrapposizione tra funzioni "multiformi" o "a più valori", che si trovano nello studio delle funzioni di variabile complessa (ad esempio, la funzione $\sqrt{z}$ è una "funzione a due valori") e funzioni "uniformi" od "univoche", che corrispondono al concetto moderno di funzione.

Dopo aver letto attentamente il lavoro di Peano, svolgere i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Determinare le immagini mediante la funzione di Peano dei numeri $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 3/4$ e $t = 1$.

Esercizio 2. Peano osserva che la funzione non è iniettiva e spiega anche quali sono i punti del quadrato che hanno più di una controimmagine. Determinare esplicitamente uno di questi punti e trovare tutte le controimmagini.

Questi ultimi esercizi riguardano i commenti che Peano riporta alla fine del lavoro.

Esercizio 3. Trovare una corrispondenza biunivoca fra l'intervallo $[0,1]$ ed il quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

Esercizio 4. Dimostrare che *ogni* $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ che sia biunivoca è necessariamente discontinua (Suggerimento: usare il fatto che l'intervallo ed il quadrato non sono omeomorfi).

Esercizio 5. Enunciare esattamente il teorema a cui si riferisce Peano nel punto 1) del commento finale e dedurne che sotto le ipotesi fatte l'arco di curva parametrizzato si può effettivamente racchiudere in una regione piana di area arbitrariamente piccola.