GEOMETRIA 3

A.A 2015/16

PROVA SCRITTA DEL 18 GENNAIO 2017

[1]

(i) (4 punti) Data la curva nello spazio

$$\gamma(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3), \quad t \in [-5, 5],$$

stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Posto $a = 2$, calcolarne il raggio di curvatura nel punto $(0, 1, 0)$.

(ii) (3 punti) Per una curva differenziale $\alpha(s)$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea s sappiamo che $\mathbf{t}'(0) = (2, 0, 2)$ e $\mathbf{t}''(0) = (9, 7, 1)$, calcolare $k'(0)$, dove $k(s)$ è la curvatura di $\alpha(s)$.

[2] (6 punti) Provare che gli integrali curvilinei di forme chiuse sono invarianti per omotopia.

[3]

(i) (3 punti) Dare la definizione di differenziale di forme differenziali ed enunciarne le principali proprietà.

(ii) (2 punti) Dare la definizione di simboli di Christoffel di una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

[4] (3 punti) Usare il Teorema di Stokes per calcolare

$$\int_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot N \, d\sigma,$$

con $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy)$ ed S la parte della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ che sta dentro il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e sopra il piano xy.

[5] (5 punti) Dare la definizione di superficie orientabile in $\mathbb{R}^3$ e dimostrare che la sfera è orientabile.

[6] Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u, v, uv^2\right), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

(1) (2 punti) Provare che $\mathbf{x}(U)$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ e calcolarne il versore normale in ogni punto (in particolare, mostrare che $\mathbf{x}$ è iniettiva).
(2) (2 punti) Calcolare l'espressione della prima e della seconda forma fondamentale di $\mathbf{x}$ in ogni punto.
(3) (2 punti) Scrivere la matrice dell'operatore forma nel punto $P = \mathbf{x}(0,1)$ e calcolare le curvature principali in tale punto.