Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 12 giugno 2017

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (6 punti) Sia X uno spazio topologico e sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una partizione di X, cioè $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Supponiamo che

1. A_i è aperto per ogni $i \in I$
2. il sottospazio A_i è di Hausdorff per ogni $i \in I$

- (4 punti) Dimostrare che X è di Hausdorff.
- (2 punti) Se si sostituisce l'ipotesi 1. con

  1'. A_i è chiuso per ogni $i \in I$

  la conclusione rimane vera? (dimostrare o trovare un controesempio).

Esercizio 2. (7 punti) Sia $X = M(2,\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea e sia

$$Y = \{A \in X \mid A^2 = I\}$$

dove I è la matrice identità.

1. (2 punti) dimostrare che Y è chiuso
2. (3 punti) dimostrare che Y non è compatto
3. (2 punti) Y è connesso? (suggerimento: osservare che $Y \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$).

Esercizio 3. (5 punti) Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$$

e poniamo $X = A \cup B \in \mathbb{R}^3$ con la topologia di sottospazio.

Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 4. (4 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b^{-1}\,c\,d^{-1}\,e\,a^{-1}\,b\,c^{-1}\,d\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 5. (5 punti) Consideriamo la seguente matrice complessa, dove $h \in \mathbb{C}$ è un parametro:

$$A = \begin{bmatrix} h & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & h-2 & h-1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la forma canonica di Jordan di A al variare di h.

Esercizio 6. (5 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia π il piano per $P_1 = [1 : 1 : 0 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : -1 : 0 : 1 : 1]$, $P_3 = [1 : 0 : 1 : 0 : 0]$, e sia r la retta per $Q_1 = [t : 0 : 1 : 1 : 2]$, $Q_2 = [0 : t : -1 : -1 : 0]$, dove t è un parametro reale.

Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.