Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 15 settembre 2017

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Numero di matricola ____

Voto ____

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(9 punti)* Sia $\sigma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva p.r.l.a. Supponiamo che esistano un punto $p \in \mathbb{R}^3$ e una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\sigma(s) - p = f(s)\sigma'(s) \quad \text{ per ogni } s \in (a,b).$$

Mostrare che f è di classe C^∞, e che il sostegno di σ è contenuto in una retta passante per p.

Esercizio 2 *(12 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 0, z = \log\left(\frac{x+y}{2}\right)\}.$$

(i) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

(ii) Sia $p = (1,1,0) \in S$. Scrivere l'equazione di T_pS come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, e calcolare la curvatura gaussiana di S in p.

(iii) Sia $\sigma\colon (0,+\infty) \to S$ data da $\sigma(t) = (t,t,\log t)$. Mostrare che σ è una linea di curvatura per S.

Esercizio 3 *(10 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 + 2\},$$

e sia $R \subset S$ la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calcolare l'area di R.