**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**
**Foglio di esercizi n. 1 – a.a. 2017-18**

Gli esercizi della prima parte verranno discussi nel tutorato di martedì 10 ottobre e non sono da consegnare.
Gli esercizi della seconda parte sono da consegnare martedì 17 ottobre.

PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Sia $I$ un insieme arbitrario, sia $f : X \to Y$ una funzione. Siano inoltre $A, A_i \subseteq X$ e $B, B_i \subseteq Y$. Dimostrare le seguenti formule:

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
3. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
4. $f(f^{-1}(A)) \subseteq A, \qquad B \subseteq f^{-1}(f(B))$

**Esercizio 2.** Siano $X$, $Y$ due insiemi, $A \subseteq X$ e $f : X \to Y$ una funzione. È vero che

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)?$$

**Esercizio 3.** Siano $X$, $Y$ due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione. Dimostrare che:

1. $f$ è iniettiva $\iff$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ per ogni $A, B \subseteq X$ $\iff$ $f^{-1}(f(C)) = C$ per ogni $C \subseteq X$
2. $f$ è suriettiva $\iff$ $f(f^{-1}(D)) = D$ per ogni $D \subseteq Y$

**Esercizio 4.** Quale delle seguenti funzioni è una metrica su $\mathbb{R}$?

1. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
2. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
3. $d(x, y) = e^{x-y}$
4. $d(x, y) = |x - 3y|$

**Esercizio 5.** Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

1. Trovare la chiusura di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0, 1]$ e $\{1\} \cup (2, 3]$
2. Trovare l'interno di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $(0, 1]$
3. È vero che
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\circ} = \left(\bigcup_{i\in I} A_i{}^{\circ}\right)$$
oppure
$$\overline{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)} = \left(\bigcup_{i\in I} \overline{A}_i\right)?$$

SECONDA PARTE

**Esercizio 6.** Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato (e cioè la relazione $\leq$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva). Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di $x \in X$, una base di una topologia.

**Esercizio 7.** Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi aperti (senza bordo) $\{x^2 + y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

**Esercizio 8.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon < 1\}$$

delle palle aperte di raggio minore di 1 e centro arbitrario è una base per la topologia indotta dalla distanza.

**Esercizio 9.** Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso (in particolare, tutti i punti sono chiusi). Dimostrare che uno spazio topologico $X$ è **T1** se e solo se per ogni $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

(l'intersezione di tutti gli intorni di un punto è solo il punto stesso).

Dimostrare che ogni spazio metrico è **T1**.

**Esercizio 10.** Due sottoinsiemi $A$ e $B$ di uno spazio topologico $X$ si dicono **separati** se

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$$

Dimostrare che:

1. Se $F$, $G \subseteq X$ sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora $A = F - G$ e $B = G - F$ sono separati.
2. Se $A, B \subseteq X$ sono separati, allora $A$ e $B$ sono entrambi aperti e chiusi in $A \cup B$.

**Esercizio 11.** Sia $X$ uno spazio metrico. Dimostrare che una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.

Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico con una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.