Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 2 – a.a. 2017-18

Da consegnare: martedì 24 ottobre

Esercizio 1. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico si dicono *aderenti* se

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$$

(cioè se la chiusura di almeno un insieme interseca l'altro).

Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$ preserva la relazione di aderenza, cioè per ogni coppia di insiemi A, $B \subseteq X$ aderenti le immagini $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti (le funzioni continue non "strappano" lo spazio).

Viceversa, dimostrare che se $f : X \to Y$ è una funzione fra spazi topologici **T1** che preserva la relazione di aderenza allora f è continua.

Suggerimento: usare il Lemma 3.25 fatto a lezione.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

In particolare, il prodotto di due chiusi è chiuso nel prodotto.

Esercizio 3. Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$$

Confrontare questa proprietà con la definizione di spazio **T1** (Esercizio 4 del primo foglio di esercizi)

Esercizio 4. Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue con Y spazio di Hausdorff. Dimostrare che:

1. se f e g coincidono su un sottoinsieme denso allora coincidono ovunque;
2. il grafico Γ di f è chiuso in $X \times Y$.

Esercizio 5. (Esercizio 1 dello scritto del 14 settembre 2016). Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un sottoinsieme è aperto se e solo se è l'insieme vuoto oppure il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X?