Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 4 – a.a. 2017-17

Da consegnare: martedì 7 novembre

Esercizio 1. Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.

Esercizio 2. *(Esercizio 5.11. del Manetti)* Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottoinsieme compatto e X/K la contrazione di K ad un punto. Dimostrare che X/K è di Hausdorff.

Esercizio 3. *(Esercizio 5.18. del Manetti)* Pensando $\mathbb{RP}^1$ come il quoziente $(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{R}^*$, indichiamo con $[x_0, x_1] \in \mathbb{RP}^1$ la classe di equivalenza del vettore non nullo $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Quindi $[x_0, x_1]$ significa un vettore non nullo determinato a meno di proporzionalità.

Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{RP}^1 \to S^1$ data da

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

Esercizio 4. Siano X e Y due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0, 1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x, y, t) \sim (x', y', t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1, 1\}$ la sfera di dimensione 0 e S^1 la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa. Un disegno può aiutare.).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?