# Geometria 2, a.a. 2016/2017
# Il completamento $p$-adico di $\mathbb{Q}$
# (foglio di esercizi facoltativo)

In questi esercizi diamo le definizioni di norma $p$-adica sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. La norma $p$-adica soddisfa la cosiddetta *disuguaglianza ultrametrica*, che è più forte della usuale disuguaglianza triangolare che vale per il valore assoluto. In particolare, non vale più la familiare *proprietà archimedea* e le proprietà della metrica indotta su $\mathbb{Q}$ dalla norma $p$-adica sono alquanto diverse da quelle della metrica euclidea.

Studieremo alcuni semplici aspetti della norma $p$-adica per familiarizzarci con le sue proprietà. Vedremo poi alcune proprietà della topologia indotta su $\mathbb{Q}$ da una norma $p$-adica.

Rispetto alla metrica indotta $\mathbb{Q}$ non è completo e vedremo alcuni esempi di completamento. In particolare, vedremo come il completamento di $\mathbb{Q}$ rispetto ad una norma $p$-adica sia piuttosto diverso da $\mathbb{R}$ (completamento rispetto alla norma euclidea), e analizzeremo il comportamento di alcune delle familiari proprietà di convergenza delle successioni e delle serie.

## 1 La norma $p$-adica

Sia $K$ un campo. Una mappa $\| \cdot \| : K \to \mathbb{R}^+$ si dice *norma* su $K$ se per ogni $x, y \in K$ si ha che

1. $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$
2. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Da una norma si può sempre definire una distanza ponendo $d(x, y) = \|x - y\|$ e dunque da una norma si può definire una topologia su un campo. Come su un insieme possono essere definite diverse distanze, su un campo si possono definire diverse norme. Poiché siamo interessati a studiare la topologia indotta dalle norma, è utile introdurre una definizione di equivalenza tra norme.

**Definizione 1.1.** Due norme $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ su un campo $K$ sono *equivalenti* se definiscono la stessa topologia su $K$.

Osserviamo che le distanze indotte possono essere differenti e cioè $(K, \| \cdot \|_1)$ e $(K, \| \cdot \|_2)$ potrebbero essere omeomorfi ma non isometrici.

**Esempio 1.2.** Sia $K = \mathbb{Q}$ e poniamo $\|x\| = |x|$, l'usuale valore assoluto. È ben noto che in questo caso si ha una norma.

**Esercizio 1.3.** Sia $0 < \alpha \leq 1$ un numero reale fissato e poniamo $\|x\|_\alpha = |x|^\alpha$. Dimostrare che:

1. $\|x\|_\alpha = |x|^\alpha$ è una norma su $\mathbb{Q}$;
2. per ogni coppia di numeri $0 < \alpha < \beta \leq 1$ le norme $\| \cdot \|_\alpha$ e $\| \cdot \|_\beta$ sono equivalenti;
3. se $\alpha > 1$, allora $\| \cdot \|_\alpha$ non è una norma (quale proprietà non è più vera?)

Definiamo ora le norme $p$-adiche su $\mathbb{Q}$. Sia $p$ un numero primo fissato: per ogni $a \in \mathbb{Z}$ non nullo definiamo

$$\mathrm{ord}_p(a) = \text{ massima potenza di } p \text{ che divide } a$$

Per esempio,

$$\mathrm{ord}_2(10) = 1, \qquad \mathrm{ord}_2(8) = 3, \qquad \mathrm{ord}_5(17) = 0$$

Osserviamo che, poiché $\mathrm{ord}_p$ è un esponente, si comporta come un logaritmo:

$$\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$$

Per un razionale non nullo definiamo ora

$$\mathrm{ord}_p\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b)$$

**Esercizio 1.4.** Dimostrare che $\mathrm{ord}_p$ è ben definito per i numeri razionali e cioè: se $a/b = c/d$, allora $\mathrm{ord}_p(a/b) = \mathrm{ord}_p(c/d)$.

Possiamo finalmente definire la norma $p$-adica. Poniamo $\gamma = \dfrac{1}{p}$ (la proprietà importante di $\gamma$ è che è minore di 1). Per $x \in \mathbb{Q}$ si ha

$$|x|_p = \begin{cases} \gamma^{\mathrm{ord}_p(x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

**Proposizione 1.5.** $| \cdot |_p$ *è una norma su* $\mathbb{Q}$.

*Dimostrazione.* Le proprietà 1. e 2. sono immediate. Dimostriamo quindi la 3.: per la fattorizzazione unica si può scrivere:

$$x = p^m \frac{u}{v}, \qquad y = p^n \frac{w}{t}$$

dove $m, n \in \mathbb{Z}$ e $p \nmid uvwt$. Supponiamo che sia $|x|_p \geq |y|_p$ e quindi, poiché $\gamma < 1$, si ha $m \leq n$. Possiamo dunque scrivere $n = m + \tau$, con $\tau \geq 0$. Allora

$$\begin{aligned} x + y &= p^m \left(\frac{u}{v} + p^\tau \frac{w}{t}\right) \\ &= p^m \frac{ut + p^\tau wv}{vt} \end{aligned}$$

e poiché $p$ non divide il denominatore, la potenza massima di $p$ che divide $x + y$ è almeno $m$. Abbiamo perciò

$$|x + y|_p \leq \gamma^m = |x|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

□

Analizzando la dimostrazione, osserviamo che abbiamo dimostrato molto di più della disuguaglianza triangolare: infatti, la norma della somma è minore o uguale al massimo delle due norme. Riportiamo questo fatto in una definizione:

**Definizione 1.6.** Una norma si dice *non archimedea* se soddisfa la *disuguaglianza ultrametrica*, e cioè

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

**Definizione 1.7.** Una distanza si dice *non archimedea* se soddisfa la *disuguaglianza ultrametrica*, e cioè

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

È immediato verificare che la distanza indotta da una norma non archimedea è non archimedea. La terminologia "non archimedea" viene dal fatto che per queste norme non vale il cosiddetto Assioma di Archimede (che invece vale per il valore assoluto usuale):

**Assioma di Archimede.** *Dati due numeri $x, y \in \mathbb{Q}$ con $|x| < |y|$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|nx| \geq |y|$$

Infatti, se $|x|_p < |y|_p$ si ha

$$|nx|_p = |x + \cdots + x|_p \leq \max\{|x|_p, \ldots, |x|_p\} = |x|_p < |y|_p$$

In particolare, per qualsiasi primo $p$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $|n|_p \leq 1$.

Con ognuna di queste norme $p$-adiche, $\mathbb{Q}$ diventa una spazio metrico e quindi è possibile "fare geometria". Vedremo che queste geometrie non archimedee hanno proprietà geometriche piuttosto strane, ben diverse dal caso archimedeo.

**Proposizione 1.8.** *Sia $\|\cdot\|$ una norma non archimedea sul campo $K$. Allora tutti i triangoli sono isosceli, cioè hanno almeno due lati uguali.*

*Dimostrazione.* Siano $x$, $y$ e $z \in K$ i vertici di un triangolo. I lati misurano dunque $\|x-y\|$, $\|x-z\|$ e $\|y-z\|$. Se i primi due lati non sono uguali possiamo supporre, eventualmente rinominando i vertici, che

$$\|x - y\| < \|x - z\|$$

Per il terzo lato si ha:

$$\|y - z\| = \|(x - z) - (x - y)\| \leq \max\{\|x - y\|, \|x - z\|\} = \|x - z\|$$

ma si ha anche

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \max\{\|(x - y)\|, \|(y - z)\|\}$$

Poiché $\|x - y\| < \|x - z\|$, deve essere $\|x - z\| \leq \|(y - z)\|$ e quindi

$$\|x - z\| = \|(y - z)\|$$

e cioè i due lati sono uguali. □

**Esercizio 1.9.** Sia $\|\cdot\|$ una norma non archimedea sul campo $K$. Allora:

1. $\|x\| = \|-x\|$;
2. $\|x-y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$;
3. $\|x\| \neq \|y\| \implies \|x \pm y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Concludiamo questa parte sulle norma $p$-adiche su $\mathbb{Q}$ con una motivazione della scelta del valore di $\gamma$. Per $x \in \mathbb{Q}$ abbiamo infinite norme $|x|_p$, una per ogni numero primo. Poniamo, per analogia di notazione $|x|_\infty = |x|$, l'usuale valore assoluto. In questa terminologia, la norma euclidea corrisponde al "primo all'infinito".

**Esercizio 1.10.** Sia $x \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che:

1. $|x|_p \neq 1$ solo per un numero finito di valori di $p$;
2. $\prod_{p \text{ primo}} |x|_p = 1$, dove il prodotto comprende anche il "primo all'infinito"

Notiamo che la formule nel punto 2. vale proprio in virtù della scelta fatta per i valori di $\gamma$.

# 2 Il completamento $p$-adico

Ogni spazio metrico ammette un (unico) completamento. Per esempio, il completamento di $(\mathbb{Q}, |\cdot|_\infty)$ è il campo $\mathbb{R}$.

Il completamento di $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ si chiama il *campo dei numeri p-adici* e si indica con $\mathbb{Q}_p$. Non dimostreremo che $\mathbb{Q}_p$ è un campo, e ci accontenteremo di mostrare solo alcuni esempi di elementi di $\mathbb{Q}_p$.

Dalla definizione generale di completamento, gli elementi di $\mathbb{Q}_p$ sono (classi di equivalenza di) successioni di Cauchy. Cosa vuol dire essere di Cauchy in norma $p$-adica? Vediamo alcuni esempi di successioni di numeri interi, che risultano essere di Cauchy.

**Esempio 2.1.** Sia $p = 5$ e consideriamo la successione

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 34, \quad a_3 = 334, \quad \ldots, \quad a_n = 3\ldots34$$

Si ha, per $m \geq n$

$$a_m - a_n = 3\ldots30\ldots0$$

dove vi sono $n$ zeri. Quindi $5^n|(a_m - a_n)$ e cioè

$$|a_m - a_n|_5 = 5^{-n}$$

e dunque la successione $\{a_n\}$ è di Cauchy e la sua classe $[a_n] \in \mathbb{Q}_p$. Osserviamo che

$$3a_1 = 12, \quad 3a_2 = 102, \quad 3a_3 = 1002, \quad \ldots, \quad 3a_n = 10\ldots02$$

e quindi

$$3a_n - 2 = 10^n \implies a_n - \frac{2}{3} = \frac{10^n}{3}$$

Questo vuol dire che la successione $\{a_n\}$ è equivalente alla successione costante $b_n = 2/3$. In altre parole $[a_n] = 2/3 \in \mathbb{Q}$.

**Esempio 2.2.** Vediamo adesso una successione di Cauchy che non converge e quindi la sua classe appartiene al completamento ma non è un numero razionale.

Poniamo ancora $p = 5$ e $a_1 = 2$. Vogliamo determinare una successione tale che

1. $a_n^2 + 1 \equiv 0 \mod 5^n$
2. $a_{n+1} \equiv a_n \mod 5^n$

Abbiamo già $a_1$ e cerchiamo di determinare $a_2$. La seconda condizione dice

$$a_2 = a_1 + 5b$$

e quindi basta trovare $b$ tale che $(a_1 + 5b)^2 + 1$ sia divisibile per $5^2$. Sviluppando il quadrato e usando la prima condizione per $a_1$ si ha

$$(a_1 + 5b)^2 + 1 = (a_1^2 + 1) + 10a_1 b + 25b^2 = 5 + 20b + 25b^2 = 5(1 + 4b) + 25b^2$$

Basta dunque trovare $b$ in modo che $1 + 4b$ sia multiplo di 5 e cioè risolvere la congruenza

$$4b + 1 \equiv 0 \mod 5$$

cosa possibile perché 4 è invertibile modulo 5 (osserviamo che $4 = 2a_1$).

Proseguendo in questo modo, supponiamo di aver determinato $a_n$ che soddisfa le due condizioni. Poniamo allora

$$a_{n+1} = a_n + b5^n$$

e cerchiamo $b$ tale che $(a_n + b5^n)^2 + 1$ sia divisibile per $5^{n+1}$. Sviluppando il quadrato e usando la prima condizione per $a_n$ si ha

$$\begin{aligned}(a_n + b5^n)^2 + 1 &= (a_n^2 + 1) + 2a_n b\, 5^n + b^2\, 5^{2n} \\ &= c\, 5^n + 2a_n b\, 5^n + 25b^2 = (c + 2a_n b)\, 5^n + 25b^2\end{aligned}$$

Basta dunque trovare $b$ in modo che $c + 2a_n b$ sia multiplo di 5 e cioè risolvere la congruenza

$$2a_n b + c \equiv 0 \mod 5$$

Una semplice induzione usando la seconda condizione mostra che $a_n \equiv a_1 \mod 5$ e quindi $a_n$ non è divisibile per 5 (ricordiamo che $a_1 = 2$). Allora $2a_n$ è invertibile modulo 5 e la congruenza ha soluzione.

Ora che abbiamo la successione $\{a_n\}$ osserviamo che la condizione 2. implica che è di Cauchy, infatti per $m \geq n$ si ha

$$a_m - a_n = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$

e quindi, poiché la norma 5-adica è non archimedea

$$|a_m - a_n|_5 \leq \max\{|(a_m - a_{m-1})|_5, |(a_{m-1} - a_{m-2})|_5, \ldots |(a_{n+1} - a_n)|_5\} \leq 5^{-n}$$

La condizione 1. implica che la successione $\{a^2\}$ è equivalente alla successione costante $b_n = -1$. Se poniamo

$$e = [a_n] \in \mathbb{Q}_5$$

otteniamo che in $\mathbb{Q}_5$ vale $e^2 = -1$ e cioè $\mathbb{Q}_5$ contiene l'unità immaginaria ed è quindi diverso da $\mathbb{R}$.

# 3 Qualche proprietà topologica di un campo non archimedeo

Poiché in uno spazio metrico la topologia è determinata della palle aperte, studiamo alcune proprietà della palle, sia aperte che chiuse. Tutto quello che dimostreremo varrà, in particolare, in tutti i campi $\mathbb{Q}_p$ e anche nel campo $\mathbb{Q}$ con la norma $p$-adica.

Sia dunque $a \in K$ e $r > 0$ un numero reale, e definiamo, come al solito

$$B(a, r) = \{x \in K \mid \|x - a\| < r\}$$

e

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in K \mid \|x - a\| \leq r\}$$

la palla *aperta* (rispettivamente la palla *chiusa*) di centro $a$ e raggio $r$.

La prima proprietà è piuttosto sorprendente, ma è una semplice conseguenza del fatto che tutti i triangoli sono isosceli.

**Proposizione 3.1.** *Sia $\| \cdot \|$ una norma non archimedea sul campo $K$. Allora ogni punto all'interno di una palla (aperta o chiusa) è il suo centro.*

*Dimostrazione.* Con le notazione appena introdotte, l'enunciato significa (per le palle aperte):

$$\forall b \in B(a, r) \text{ si ha: } B(a, r) = B(b, r)$$

Sia infatti $x \in B(a, r)$ e cioè $\|x - a\| < r$. Calcolando

$$\|x - b\| = \|(x - a) + (a - b)\| \leq \max\{\|x - a\|, \|a - b\|\} < r$$

e dunque $x \in B(b, r)$. L'inclusione opposta si prova allo stesso modo.

Per una palla chiusa la dimostrazione è la stessa, usando $\leq$ al posto di $<$. $\square$

Vediamo ora un fatto topologico importante:

**Proposizione 3.2.** *Ogni palla aperta è un insieme sia aperto che chiuso. Lo stesso vale per le palle chiuse di raggio diverso da zero. (Le palle chiuse di raggio* 0 *sono i punti, che sono chiusi ma non aperti).*

*Dimostrazione.* La palle aperte sono insieme aperti per la definizione di topologia indotta dalla metrica. Vediamo quindi che sono anche dei chiusi.

Sia $x \in \overline{B(a, r)}$. Questo significa che tutti gli intorni di $x$ (e quindi tutte le palle aperte di centro $x$) intersecano $B(a, r)$. Scegliamo $s \leq r$ e consideriamo

$$y \in B(a, r) \cap B(x, s)$$

e cioè si ha $\|y - a\| < r$ e $\|y - x\| < s$. Per la diseguaglianza ultrametrica

$$\|x - a\| = \|(x - y) + (y - a)\| \leq \max\{\|x - y\|, \|y - a\|\} < \max\{s, r\} = r$$

Dunque $x \in B(a, r)$ che è quindi un chiuso. $\square$

**Esercizio 3.3.** Completare la dimostrazione della proposizione precedente, dimostrando che le palle chiuse sono chiuse (abbastanza chiaro) e aperte (imitare la dimostrazione precedente, stando attenti alle diseguaglianze strette).

Dunque un campo non archimedeo non può essere connesso perché vi sono sottoinsiemi aperti e chiusi non banali. In effetti un campo non archimedeo è *totalmente sconnesso* e cioè le sue componenti connesse sono i punti. Sia infatti $A \subseteq K$ contenente almeno due punti distinti $x$ e $y$, sia $r = d(x, y)$ e sia $s < r$. Allora la palla aperta $B(x, s)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso che è non vuoto (contiene $x$) e non è tutto $A$ (non contiene $y$). Dunque $A$ è sconnesso.

Concludiamo con un'ultima proprietà delle palle:

**Proposizione 3.4.** *Siano $B(x, r)$ e $B(y, s)$ due palle aperte di raggio positivo. Allora*

$$B(x, r) \cap B(y, s) \neq \emptyset \iff B(x, r) \subseteq B(y, s) \text{ oppure } B(y, s) \subseteq B(x, r)$$

*cioè due palle aperte o sono disgiunte oppure sono contenute una dentro l'altra.*

*Lo stesso vale per due palle chiuse.*

*Dimostrazione.* L'implicazione " $\Longleftarrow$ " è ovvia. Supponiamo dunque che l'intersezione sia non vuota e sia $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$. Possiamo supporre $s \leq r$.

Per la proposizione 3.1, il punto $z$ è il centro di ogni palla in cui sta e cioè:

$$B(y, s) = B(z, s) \subseteq B(z, r) = B(x, r)$$

Per le palle chiuse la dimostrazione è la stessa (esercizio!). □

Si può descrivere quest'ultima proprietà dicendo che in un campo ultrametrico le palle si comportano come *gocce di mercurio* (vedi [VVZ], Introduction, p. xii).

# 4 Convergenza delle serie

Terminiamo con una proposizione che mostra come in un campo ultrametrico completo la convergenza delle serie sia più semplice che nel campo reale.

**Proposizione 4.1.** *Sia $K$ un campo ultrametrico completo (per esempio, $K = \mathbb{Q}_p$) e sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $K$. Allora la serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

La nozione di convergenza di una serie è la solita: ponendo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, la somma parziale $n$-esima, diciamo che la serie $\sum_n a_n$ converge a $S$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} s_n = S$.

*Dimostrazione.* Se la serie converge è chiaro che il termine generale tende a zero, poiché

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Viceversa, per $m \geq n$ si ha

$$\|s_m - s_n\| = \|a_m + a_{m-1} + \cdots + a_{n+1}\| \leq \max_{n \leq i \leq m} \|a_i\|$$

e poiché $a_n \to 0$, la successione $\{s_n\}$ è di Cauchy e quindi converge perché $K$ è completo. □

## Riferimenti bibliografici

[C] J. W. S. Cassels, *Local Fields*, London Mathematical Society Student Texts, CAmbridge University Press, 1986

[G] F. Gouvêa, *p-adic Numbers: An Introduction*, Universitext, Sprinegr, 1997

[K] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, GTM 58, Springer, 1984

[VVZ] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich e E. I. Zelenov, *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, 1994