

**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**  
**Foglio di esercizi n. 7 – a.a. 2017-18**

Da consegnare: martedì 28 novembre

**Esercizio 1.** (Manetti, Es. 11.1.) Provare che i due cammini  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \quad \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t))$$

sono omotopicamente equivalenti.

**Esercizio 2.** (Manetti, Es. 11.17.) Calcolare il gruppo fondamentale del sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  unione della sfera  $S^2$  e dei tre piani coordinati (sul libro di Manetti c'è un suggerimento).

**Esercizio 3.** (Manetti, Es. 12.33.) Dimostrare che  $\mathbb{R}^2$  non è omeomorfo a  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ .

**Esercizio 4.** Esiste uno spazio topologico  $Y$  tale che  $S^1 \times Y$  è omeomorfo alla sfera  $S^2$ ? Esiste  $Y$  tale che  $S^1 \times Y$  è omeomorfo al piano  $\mathbb{R}^2$ ? Esiste  $Y$  tale che  $S^1 \times Y$  è omotopicamente equivalente al piano  $\mathbb{R}^2$ ?

**Esercizio 5.** Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

e sia

$$X = A \cup C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

( $X$  è detto il “pettine”). Dimostrare che:

1.  $X$  è contraibile
2. il punto  $P = (0, 0)$  è un retratto di deformazione di  $X$
3. il punto  $Q = (0, 1)$  NON è un retratto di deformazione di  $X$