Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 1 – a.a. 2015-16

Soluzioni

Gli esercizi sono presi dal libro di Manetti. Per svolgere questi esercizi, studiare con cura i paragrafi 3.1, 3.2, 3.3, e 3.4 del libro.

È consigliato svolgere *tutti* gli esercizi del libro. Riportiamo qui il testo per chi non ha ancora il libro. Sul libro ci sono (a volte) suggerimenti sullo svolgimento.

Esercizio 3.3. Sia X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid \infty \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Soluzione.

Verifichiamo che gli insiemi di $\mathcal{T}$ soddisfano gli assiomi degli aperti di una topologia.

1. $\infty \notin \emptyset$ e quindi l'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}$. $X \setminus X = \emptyset$ è finito e quindi X appartiene a $\mathcal{T}$.

2. Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ l'unione di una famiglia di elementi di $\mathcal{T}$. Se $\infty \notin A_i$ per ogni i, allora $\infty \notin A$ e quindi $A \in \mathcal{T}$. Se invece esiste un indice $i \in I$ tale che $\infty \in A_i$, allora $X \setminus A_i$ è finito. Poiché
$$X \setminus A = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$
si ha $X \setminus A \subseteq X \setminus A_i$ e quindi è finito, cioè $A \in \mathcal{T}$.

3. Sia $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathcal{T}$. Se esiste un indice i tale che $\infty \notin A_i$, allora $\infty \notin A$ e quindi $A \in \mathcal{T}$. Altrimenti, $\infty \in A_i$ per ogni i e quindi gli insiemi $X \setminus A_i$ sono tutti finiti. Poiché
$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$
l'unione finita di insiemi finiti è finita e dunque $A \in \mathcal{T}$.

Esercizio 3.4. Sia X un insieme. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito o numerabile}\}$$

è una topologia su X.

Soluzione.

Verifichiamo che gli insiemi di $\mathcal{T}$ soddisfano gli assiomi degli aperti di una topologia.

1. L'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}$ per ipotesi. $X \setminus X = \emptyset$ è finito e quindi X appartiene a $\mathcal{T}$.
2. Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ l'unione di una famiglia di elementi di $\mathcal{T}$. Poiché
$$X \setminus A = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$
si ha $X \setminus A \subseteq X \setminus A_i$ per ogni i e quindi è finito oppure numerabile, cioè $A \in \mathcal{T}$.
3. Sia $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathcal{T}$. Poiché
$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$
l'unione finita di insiemi finiti o numerabili è finita o al più numerabile e dunque $A \in \mathcal{T}$.

Esercizio 3.5. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato (e cioè la relazione $\leq$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva). Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di $x \in X$, una base di una topologia.

Soluzione.

Dobbiamo verificare che la famiglia $\mathcal{B} = \{M_x \mid x \in X\}$ soddisfa il criterio per essere una base (Teorema 3.7).

1. Poiché per ogni $x \in X$ si ha $x \in M_x$ ($\leq$ riflessiva), si ha

$$\bigcup_{M_x \in \mathcal{B}} M_x = \bigcup_{x \in X} M_x = X.$$

2. Siano M_x, M_y due elementi di $\mathcal{B}$. Se $M_x \cap M_y = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo quindi $z \in M_x \cap M_y$ e dobbiamo trovare un insieme $U = M_w$ (per qualche $w \in X$) tale che

$$z \in U \subseteq M_x \cap M_y$$

   $z \in M_x$ significa $x \leq z$ e questo implica $M_z \subseteq M_x$ ($\leq$ transitiva). Allo stesso modo, $z \in M_y$ significa $y \leq z$ e questo implica $M_z \subseteq M_y$. Dunque $M_z \subseteq M_x \cap M_y$, cioè possiamo prendere $U = M_z$.

Osservazione: non abbiamo usato la proprietà antisimmetrica di $\leq$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. La dimostrazione è corretta e cioè la proprietà antisimmetrica non serve.
2. La dimostrazione è incompleta e/o non corretta.
3. Abbiamo usato la proprietà antisimmetrica senza dirlo esplicitamente.

Esercizio 3.10. Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi aperti (senza bordo) $\{x^2 + y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia e determinare la chiusura dell'iperbole di equazione $xy = 1$.

Soluzione.

Verifichiamo che gli insiemi di $\mathcal{T}$ soddisfano gli assiomi degli aperti di una topologia.

1. $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ appartengono a $\mathcal{T}$ per ipotesi.
2. Denotiamo $D_r = \{x^2 + y^2 < r^2\}$ il disco aperto di centro l'origine e raggio r. Sia $D = \bigcup_{i \in I} D_{r_i}$ l'unione di una famiglia di dischi aperti. Se l'insieme $\{r_i \mid i \in I\}$ dei raggi non è limitato superiormente, allora $D = \mathbb{R}^2$ e quindi appartiene a $\mathcal{T}$. Altrimenti, posto $r = \sup\{r_i \mid i \in I\}$ si verifica immediatamente che $D = D_r$ è il disco aperto di centro l'origine e raggio r che appartiene a $\mathcal{T}$.
3. Sia $D = \bigcap_{i=1}^{n} D_{r_i}$ l'intersezione di una famiglia finita di elementi di $\mathcal{T}$. Posto $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ è immediato osservare che $D = D_r$ e quindi appartiene a $\mathcal{T}$.

Poiché gli aperti sono i dischi aperti di centro l'origine, i chiusi sono i complementari e quindi sono gli insiemi della forma

$$C_r = \{x^2 + y^2 \geq r^2\}$$

e cioè gli esterni dei dischi (circonferenza compresa). La chiusura di un insieme è il più piccolo chiuso che contiene l'insieme. Si vede facilmente che il punto sull'iperbole a distanza minima dall'origine è il punto $(1, 1)$ e quindi la chiusura dell'iperbole è $C_{\sqrt{2}}$, l'esterno del disco di raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 3.11. Mostrare che, nella topologia euclidea su $\mathbb{R}$, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, un sistema fondamentale di intorni di 0.

Soluzione.

Dobbiamo dimostrare che per ogni U intorno di 0 esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[-2^{-n}, 2^{-n}] \subseteq U$.

Sia dunque U un intorno di 0. Per definizione di intorno, esiste un aperto A tale che $0 \in A \subseteq U$. Poiché gli intervalli aperti sono una base della topologia euclidea esiste $\epsilon > 0$ tale che $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A$.

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 < 2^{-n} < \epsilon$ (basta scegliere $n > -\log_2(\epsilon)$). Allora

$$0 \in [-2^{-n}, 2^{-n}] \subseteq (-\epsilon, \epsilon) \subseteq A \subseteq U$$

Esercizio 3.12. Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso (in particolare, tutti i punti sono chiusi). Dimostrare che uno spazio topologico X è **T1** se e solo se per ogni $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

(l'intersezione di tutti gli intorni di un punto è solo il punto stesso).

Dimostrare che ogni spazio metrico è **T1**.

Soluzione.

Supponiamo che per ogni $x \in X$ si abbia $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$. Fissiamo $x \in X$ e sia $C = \overline{\{x\}}$. Sia $y \in C$. Allora ogni intorno di y incontra $\{x\}$ e cioè

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in I(y)} U = \{y\}$$

e quindi $y = x$. Ma allora $C = \overline{\{x\}} = \{x\}$ e cioè $\{x\}$ è chiuso. Questo vuol dire che lo spazio è **T1**.

Viceversa, supponiamo che lo spazio X sia **T1** e cioè che per ogni $x \in X$ l'insieme $\{x\}$ sia chiuso. Fissiamo $x \in X$. Per ogni $y \neq x$, si ha $x \notin \overline{\{y\}} = \{y\}$ e quindi, per definizione di chiusura, esiste un intorno U di x tale che $y \notin U$.

Quindi per ogni $y \neq x$, $y \notin \bigcap_{U \in I(x)} U$ e quindi $\bigcap_{U \in I(x)} U = \{x\}$.

Sia ora X uno spazio metrico e sia $x \in X$. Un sistema fondamentale di intorni di x è dato dalle palle aperte $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$. Si ha

$$\bigcap_{U \in I(x)} U = \bigcap_{\epsilon > 0} B_\epsilon(x) = \{x\}$$

e quindi X è **T1**.

Esercizio 3.21. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico si dicono *aderenti* se

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$$

(cioè se la chiusura di almeno un insieme interseca l'altro).

Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$ preserva la relazione di aderenza, cioè per ogni coppia di insiemi A, $B \subseteq X$ aderenti le immagini $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti (le funzioni continue non "strappano" lo spazio).

Viceversa, dimostrare che se $f : X \to Y$ è una funzione fra spazi topologici **T1** che preserva la relazione di aderenza allora f è continua.

Soluzione.

Dimostrazione 1.

Supponiamo che A, $B \subseteq X$ siano aderenti. Dobbiamo dimostrare che $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti e cioè

$$(f(A) \cap \overline{f(B)}) \cup (\overline{f(A)} \cap f(B)) \neq \emptyset$$

Supponiamo che sia $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ e dimostriamo che $f(A) \cap \overline{f(B)} \neq \emptyset$.

Sia $x \in A \cap \overline{B}$. In particolare $x \in A$ e quindi $f(x) \in f(A)$.

Poiché f è continua, per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Poiché $x \in \overline{B}$, si ha $U \cap B \neq \emptyset$ e quindi

$$\emptyset \neq f(U \cap B) \subseteq f(U) \cap f(B) \subseteq V \cap f(B)$$

Allora ogni intorno di $f(x)$ incontra $f(B)$ e cioè $f(x) \in \overline{f(B)}$. Dunque $f(x) \in f(A) \cap \overline{f(B)}$ che è quindi non vuoto.

Se invece è $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ si dimostra in modo analogo che $\overline{f(A)} \cap f(B) \neq \emptyset$.

Viceversa, siano X e Y spazi topologici **T1** e supponiamo che f preservi la relazione di aderenza. Per dimostrare che f è continua, dimostreremo che la controimmagine di ogni chiuso di Y è un chiuso di X.

Sia dunque $C \subseteq Y$ un chiuso e sia $A = f^{-1}(C)$ la sua controimmagine. Supponiamo, per assurdo, che A non sia chiuso. Esiste perciò $x \in X$ tale che $x \in \overline{A}$, $x \notin A$. Notiamo che $x \notin A = f^{-1}(C)$ e quindi $f(x) \notin C$. Poniamo $B = \{x\}$ e osserviamo che $\overline{A} \cap B = \{x\}$ è non vuoto e dunque A e B sono aderenti. Poiché f preserva la relazione di aderenza, $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti.

Esaminiamo le intersezioni. Notiamo che $f(A) \subseteq C$ e $f(B) = f(x)$ è un punto.

1. Poiché $\overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$ e $f(x) \notin C$ si ha $\overline{f(A)} \cap f(B) = \emptyset$.

2. Poiché Y è **T1**, i punti sono chiusi e quindi $\overline{f(B)} = \overline{\{f(x)\}} = \{f(x)\}$. Quindi $f(A) \cap \overline{f(B)} = \emptyset$.

Questo dice che $f(A)$ e $f(B)$ non sono aderenti, contro l'ipotesi. Questa contraddizione prova che A è chiuso e quindi f è continua.

Dimostrazione 2. Si può dare una dimostrazione alternativa usando la proprietà delle funzioni continue data nel Lemma 3.25:

Lemma (3.25)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione tra spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni sottoinsieme A di X.*

Supponiamo che $A, B \subseteq X$ siano aderenti. Dobbiamo dimostrare che $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti e cioè

$$(f(A) \cap \overline{f(B)}) \cup (\overline{f(A)} \cap f(B)) \neq \emptyset$$

Ricordiamo le proprietà dell'immagine rispetto all'unione e all'intersezione: per ogni A, B si ha

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

Si ha

$$\begin{aligned}
(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset &\implies f((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \neq \emptyset \\
&\implies f(A \cap \overline{B}) \cup f(\overline{A} \cap B) \neq \emptyset \\
&\implies \Big(f(A) \cap f(\overline{B})\Big) \cup \Big(f(\overline{A}) \cap f(B)\Big) \neq \emptyset \\
&\implies \Big(f(A) \cap \overline{f(B)}\Big) \cup \Big(\overline{f(A)} \cap f(B)\Big) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il Lemma 3.25 nell'ultima implicazione. Quindi $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti.

Viceversa, siano X e Y spazi topologici **T1** e supponiamo che f preservi la relazione di aderenza. Per dimostrare che f è continua, dimostreremo che per ogni $A \subseteq X$ si ha $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (e cioè il criterio del Lemma 3.25).

Siano dunque $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Dobbiamo dimostrare che $f(x) \in \overline{f(A)}$. Poniamo $B = \{x\}$. Poiché $\overline{A} \cap B = \{x\} \neq \emptyset$, A e B sono aderenti. Poiché f preserva la relazione di aderenza, $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti e dunque

$$\Big(f(A) \cap \overline{f(B)}\Big) \cup \Big(\overline{f(A)} \cap f(B)\Big) \neq \emptyset$$

Poiché abbiamo un'unione non vuota, (almeno) uno dei due insiemi è non vuoto. Esaminiamo i due casi, osservando che $f(B) = \{f(x)\}$ e poiché Y è **T1** si ha $\overline{f(B)} = \{f(x)\}$.

1. Se $f(A) \cap \overline{f(B)} \neq \emptyset$ allora $f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ e quindi segue la tesi.
2. Se $\overline{f(A)} \cap f(B) \neq \emptyset$ allora $f(x) \in \overline{f(A)}$ e quindi segue la tesi.

Osservazione: non abbiamo usato l'ipotesi che X sia **T1** (in nessuna delle due dimostrazioni). Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Le dimostrazioni sono corrette e cioè l'ipotesi "X è **T1**" non serve.
2. Le dimostrazioni sono incomplete e/o non corrette.
3. Abbiamo usato "X è **T1**" senza dirlo esplicitamente.

Esercizio 3.25. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$.

Soluzione.

Un sottoinsieme è denso se incontra (= ha intersezione non vuota con) tutti gli aperti dello spazio. Sia dunque U un aperto in $f(X)$. Per definizione di topologia di sottospazio, esiste $V \subseteq Y$, V aperto in Y tale che $U = V \cap f(X)$. Si ha:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V)$$

e quindi $f^{-1}(U)$ è aperto in X. Poiché A è denso in X, $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e quindi

$$\emptyset \neq f(A \cap f^{-1}(U)) \subseteq f(A) \cap U$$

Dunque $f(A)$ incontra l'aperto U e quindi è denso in $f(X)$.

Anche in questo caso possiamo dare un'altra dimostrazione usando il Lemma 3.25. Se A è denso in X si ha $\overline{A} = X$ e quindi:

$$f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Qui occorre fare attenzione perché $\overline{f(A)}$ è la chiusura di $f(A)$ in Y. Poiché la chiusura di $f(A)$ in $f(X)$ è l'intersezione della chiusura di $f(A)$ in Y con $f(X)$ (Lemma 3.55) si ha che la chiusura di $f(A)$ in $f(X)$ è $f(X)$ e quindi $f(A)$ è denso in $f(X)$.

Esercizio 3.38. Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2.

Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico con una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.

Soluzione.

La prima affermazione è una conseguenza della diseguaglianza triangolare. Sia $A = B_a(1)$ la palla aperta di centro a e raggio 1 e sia $B = B_b(2)$ la palla aperta di centro b e raggio 2. Per poter avere $B \subseteq A$ deve essere $b \in A$ e dunque $d(a, b) < 1$.

Se $B \subsetneqq A$, allora esiste $c \in A$, $c \notin B$ e cioè $d(b, c) \geq 2$ e $d(a, c) < 1$, ma questo è assurdo per la diseguaglianza triangolare:

$$d(b, c) \leq d(b, a) + d(a, c) < 1 + 1 = 2$$

Un semplice controesempio alla seconda affermazione è il seguente: sia X l'intervallo aperto $(0, 4)$ e sia $A = B_2(2) = X$ la palla aperta di centro 2 e raggio 2. Sia $b = 1/2$ e sia $B = B_b(3)$. Allora $B = (0, 7/2) \subsetneqq A$.

Osservazioni.

1. La generalizzazione corretta del primo enunciato è: una palla aperta di raggio r non può contenere propriamente una palla aperta di raggio $2r$ (stessa dimostrazione).

2. Il secondo esempio mostra che le palle non sono necessariamente "simmetriche" intorno al loro centro, come sono quelle di $\mathbb{R}^2$.