Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

L'algoritmo per la classificazione delle superfici topologiche connesse e compatte

Alberto Albano

Come notato varie volte a lezione, l'algoritmo di "taglia e incolla" usato nella classificazione delle superfici topologiche ammette una "scorciatoia" che lo rende molto più rapido.

Scopo di queste pagine è formulare con precisione la versione "veloce" dell'algoritmo e dimostrare la sua correttezza. Questa versione può essere usata durante le prove d'esame senza bisogno di essere giustificata.

Queste note hanno come prerequisito essenziale la conoscenza dell'algoritmo come presentato, per esempio, nelle note di Hitchin o nel libro di Massey.

Indice

1 L'algoritmo generale e la forma semplificata

Rivediamo i passi dell'algoritmo, così come sono presentati nelle note di Hitchin. Una superficie può essere costruita a partire da un poligono nel piano con un numero pari di lati, identificando i lati a due a due con le opportune orientazioni. Scegliendo un verso di percorrenza del perimetro del poligono e denotando i lati da identificare con la stessa lettera, la superficie è rappresentata da una sequenza di lettere

$$abc^{-1}\dots$$

dove ogni lettera è ripetuta due volte, e l'esponente indica se il verso assegnato al lato è lo stesso o l'opposto del verso di percorrenza del perimetro. Per esempio, abbiamo le rappresentazioni

1. aa = piano proiettivo
2. $aba^{-1}b^{-1}$ = toro

3. $abab^{-1}$ = bottiglia di Klein

4. $aabb$ = somma connessa di due piani proiettivi

e così via. Osserviamo però che le due ultime superfici sono in realtà omeomorfe e quindi la rappresentazione come poligono con i lati identificati non è unica.

Usando questa rappresentazione, l'operazione di somma connessa di superfici corrisponde alla giustapposizione delle corrispondenti sequenze. Per esempio

1. $aabcb^{-1}c^{-1}$ = (piano proiettivo) $\sharp$ (toro)

2. $aabb$ = (piano proiettivo) $\sharp$ (piano proiettivo)

3. $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ = (toro) $\sharp$ (toro)

Il teorema di classificazione afferma che:

Teorema 1.1. *Ogni superficie topologica connessa e compatta è omeomorfa ad una delle seguenti:*

1. *la sfera S^2, con sequanza vuota*

2. *la somma connessa di g tori, con sequenza $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$*

3. *la somma connessa di n piani proiettivi, con sequenza $a_1a_1\ldots a_na_n$*

L'algoritmo del "taglia e incolla" ha come punto di partenza una sequenza arbitraria e come punto d'arrivo una sequenza in forma canonica (una delle sequenze nell'enunciato precedente) e consente di determinare il tipo topologico della superficie data da una sequenza qualunque.

L'algoritmo, così come esposto in Hitchin, ha quattro passi. Nella notazione delle sequenze di lettere, una lettera minuscola indica un solo lato, una lettera maiuscola indica una sequenza di lati. I lati indicati con le lettere minuscole non compaiono nelle sequenze indicate dalle lettere maiuscole.

Passo 1 Si cancellano tutte le coppie del tipo aa^{-1}. Se la sequenza risultante è vuota, allora la superficie è una sfera. Altrimenti si continua con il passo 2.

Passo 2 Si rendono equivalenti tutti i vertici, usando una mosssa di taglia e incolla specifica. Dopo questo passo potrebbe essere necessario ripetere il passo 1. Dopo aver reso equivalenti tutti i vertici, se la sequenza risultante è vuota, allora la superficie è una sfera. Altrimenti si continua con il passo 3.

Passo 3 Se è presente una coppia di lati con lo stesso orientamento, cioè se la sequenza ha la forma $aXaY$, si rendono adiacenti i lati uguali con una mossa specifica. Se sono presenti altre coppie, si ripete la mossa fino ad avere tutte le coppie con lo stesso nome adiacenti. Si ottiene quindi la sequenza

$$a_1a_1\ldots a_ma_mX$$

Se X è vuota, allora la superficie è la somma connessa di m piani proiettivi, altrimenti si continua con il passo 4.

Passo 4 Le coppie presenti con lo stesso nome non adiacenti sono con l'orientamento opposto. Si dimostra che X deve avere la forma

$$X = aYbZa^{-1}Wb^{-1}T$$

e con due mosse specifiche si trasforma la sequenza in

$$cdc^{-1}d^{-1}U$$

Se sono presenti altre coppie si ripete il procedimento fino ad ottenere la sequenza

$$a_1a_1 \dots a_ma_mc_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1} \dots c_gd_gc_g^{-1}d_g^{-1}$$

che è la somma connessa di m piani proiettivi e g tori. Se $m = 0$, allora S è la somma connessa di g tori, altrimenti si usa il fatto che

$$P\sharp T = P\sharp P\sharp P$$

e si sostituisce ogni toro con la somma connessa di due piani proiettivi. Si ottiene quindi che la superficie è la somma connessa di $(m+2g)$ piani proiettivi.

L'osservazione che permette di semplificare l'algoritmo è:

le mosse eseguite nei passi 3 e 4 non
cambiano il numero dei lati nella sequenza (*)

Dimostreremo questa affermazione nel prossimo paragrafo. Diamo ora solo la regola semplificata:

1. Eseguire i passi 1 e 2 dell'algoritmo, ottenendo una sequenza X in cui tutti i vertici sono equivalenti e non ci sono coppie adiacenti che si possono semplificare. Se X è vuota, allora la superficie è una sfera, altrimenti si continua.

2. Se è presente una coppia di lati con lo stesso orientamento, allora la superficie è somma connessa di n piani proiettivi dove

$$n = \text{ (numero di lati della sequenza } X)/2$$

3. Altrimenti la superficie è somma connessa di g tori dove

$$g = \text{ (numero di lati della sequenza } X)/4$$

2 La dimostrazione della proprietà (∗)

Sia W una sequenza di un numero pari di lettere (simboli) in cui ogni lettera compare esattamente due volte con esponenti 1 o -1. La sequenza rappresenta il bordo di un poligono, in cui ogni lettera corrisponde ad un lato e l'esponente rappresenta l'orientamento del lato rispetto ad un orientamento (orario o antiorario) fissato sul perimetro. Identificando i lati che corrispondono a lettere uguali, tenendo conto dell'orientamento, si ottiene una superficie topologica S.

Applichiamo a W l'algoritmo descritto nel paragrafo precedente per ottenere una sequenza in forma canonica. Supponiamo di aver eseguito i passi 1 e 2. In questo modo abbiamo una sequenza W con la proprietà

$$\textit{tutti i vertici di } W \textit{ sono equivalenti fra loro} \tag{**}$$

Dimostriamo ora la proprietà $(*)$ e cioè che le mosse 3 e 4 non cambiano il numero dei lati nella sequenza. In entrambi i casi la dimostrazione è per assurdo: se dopo una mossa fosse possibile semplificare due lati, allora *prima* della mossa la proprietà $(**)$ non era vera, contro l'ipotesi.

Scriviamo la dimostrazione usando la notazione delle sequenze introdotta sopra. Un utile esercizio è riscrivere la dimostrazione usando le figure come nelle note di Hitchin.

Cominciamo con un lemma

Lemma 2.1. *Nelle sequenze*

$$W_1 = abXabY, \qquad W_2 = abXb^{-1}a^{-1}Y$$

dove a, b non compaiono in X e Y e X, Y sono entrambe non vuote, il vertice P comune ai lati a e b della prima coppia è equivalente solo al vertice P' comune ai lati della seconda coppia. In particolare, queste sequenze non soddisfano la proprietà $(**)$.

Dimostrazione. La descrizione del vertice P è "fine di a, inizio di b". Poiché il vertice P' soddisfa entrambe le condizioni, non ci sono altri vertici che soddisfano almeno una delle condizioni e quindi non ci sono altri vertici equivalenti a P. □

Esercizio 2.2. Se X e Y sono vuote, che superfici sono W_1 e W_2?

Proposizione 2.3. *Se W ha la proprietà $(**)$ allora una mossa di tipo 3 non cambia il numero dei lati e lascia inalterata la proprietà $(**)$*

Dimostrazione. Nella sequenza W sono presenti due lati uguali con lo stesso orientamento, quindi si può scrivere

$$W = aXaY$$

dove X e Y sono sequenze arbitrarie non vuote, perché altrimenti i lati a sarebbero già adiacenti.

La mossa 3 è (Hitchin, pagina 20)

$$W = aXaY \longrightarrow W' = ccXY^{-1}$$

dove c è un lato nuovo, che non compariva né in X né in Y. Le eventuali cancellazioni di lati avvengono nei punti di contatto delle sequenze. Poiché c non è presente né in X né in Y, non si può semplificare. Dunque l'unica semplificazione possibile è dove X e Y^{-1} si toccano. Deve quindi essere

$$\left.\begin{aligned} X &= Zb \\ Y &= Tb \end{aligned}\right\} \longrightarrow XY^{-1} = Zbb^{-1}T^{-1} = ZT^{-1}$$

Allora la sequenza originale era

$$W = aXaY = aZbaTb = ZbaTba$$

Se Z e T sono non vuote, per il Lemma 2.1 W non ha la proprietà $(**)$, contro l'ipotesi. Lasciamo per esercizio l'analisi del caso Z o T vuote. Inoltre, poiché non abbiamo introdotto nuovi vertici, questi sono ancora tutti equivalenti. $\square$

Vediamo ora le mosse di tipo 4. Questo caso è un po' più complicato perché una mossa di tipo 4 è data da due "taglia e incolla", in successione.

Proposizione 2.4. *Se W ha la proprietà $(**)$ allora una mossa di tipo 4 non cambia il numero dei lati e lascia inalterata la proprietà $(**)$.*

Dimostrazione. Nella sequenza W sono presenti due coppie di lati uguali con orientamenti opposti e intervallati e quindi si può scrivere

$$W = aTbXa^{-1}Yb^{-1}Z$$

dove T, X, Y e Z sono sequenze arbitrarie. Tre consecutive (TXY, XYZ, YZT, ZTX) non possono essere tutte vuote, altrimenti i lati a e b erano già in sequenza corretta per dare un toro.

Il primo passo della mossa 4 è (Hitchin, pagina 21)

$$W = aTbXa^{-1}Yb^{-1}Z \longrightarrow W' = aca^{-1}YXc^{-1}TZ$$

dove c è un lato nuovo, che non compariva nelle sequenze T, X, Y, Z. Come prima, le eventuali cancellazioni di lati avvengono nei punti di contatto delle sequenze.

Poiché c non era presente, non si può semplificare. I contatti $a^{-1}Y$ e Za non si possono semplificare perché erano già presenti nella sequenza iniziale.

Dunque le semplificazioni possibili avvengono per YX oppure TZ. Nel primo caso avremmo:

$$\left.\begin{aligned} Y &= A\gamma \\ X &= \gamma^{-1}B \end{aligned}\right\} \longrightarrow YX = A\gamma\gamma^{-1}B = AB$$

Allora la sequenza originale era

$$W = aTb\gamma^{-1}Ba^{-1}A\gamma b^{-1}Z = aT(b\gamma^{-1})Ba^{-1}A(\gamma b^{-1})Z$$

e la sequenza $b\gamma^{-1}$ compare invertita, di nuovo contro il Lemma 2.1. Osserviamo che poiché almeno il lato a separa le sequenze $b\gamma^{-1}$ e γb^{-1}, le ipotesi del Lemma 2.1 sono automaticamente soddisfatte. Lasciamo per esercizio il caso TZ che si dimostra con un ragionamento analogo.

Il secondo passo della mossa 4 è (Hitchin, pagina 21)

$$W' = aca^{-1}Xc^{-1}Y \longrightarrow W'' = dcd^{-1}c^{-1}YX$$

dove d è un lato nuovo, che non compariva nelle sequenze X e Y. Attenzione al fatto che X e Y indicano sequenze diverse dalla notazione precedente. Come sempre, le eventuali cancellazioni di lati avvengono nei punti di contatto delle sequenze.

Poiché d non era presente, non si può semplificare. Il contatto $c^{-1}Y$ non si può semplificare perché era già presente nella sequenza iniziale.

Dunque l'unica semplificazione possibile avviene per YX. Come prima poniamo:

$$\left.\begin{aligned} Y &= A\gamma \\ X &= \gamma^{-1}B \end{aligned}\right\} \longrightarrow YX = A\gamma\gamma^{-1}B = AB$$

Allora la sequenza originale era

$$W' = aca^{-1}Xc^{-1}Y = aca^{-1}\gamma^{-1}Bc^{-1}A\gamma = c(a^{-1}\gamma^{-1})Bc^{-1}A(\gamma a)$$

e la sequenza γa compare invertita, di nuovo contro il Lemma 2.1. Come prima, poiché almeno il lato c separa le sequenze γa e $a^{-1}\gamma^{-1}$, le ipotesi del Lemma 2.1 sono automaticamente soddisfatte. $\square$