FOGLIO 2: ESERCIZI SULLE FORME DIFFERENZIALI (PARTE I)

[1] In $\mathbb{R}^3$ si considerino le forme differenziali

$$\omega = (2-y)dx - e^y xz dz, \quad \psi = dx - 3z dy, \quad \varphi = \sin x\, dx \wedge dy + e^{x-y} dy \wedge dz,$$

calcolare

$$\omega \wedge \psi,\ \omega \wedge \varphi,\ \psi \wedge \varphi.$$

Soluzione. *Si ha*

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \psi &= -3(2-y)z\, dx \wedge dy + xe^y z\, dx \wedge dz - 3xe^y z^2\, dy \wedge dz, \\
\omega \wedge \varphi &= [(2-y)e^{x-y} - x \sin x\, e^y z] dx \wedge dy \wedge dz, \\
\psi \wedge \varphi &= e^{x-y} dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

.

[2] Date le forme differenziali su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = 2xy dx \wedge dz + 3x^2 dy \wedge dz, \quad \eta = e^{xy} dx \wedge dy \wedge dz$$

ed i campi vettoriali

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = xy\frac{\partial}{\partial y} - e^{xz}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$$

calcolare le funzioni $\omega(X,Y)$, $\omega(X,Z)$ e $\eta(X,Y,Z)$.

Soluzione. *Si ha*

$$\begin{aligned}
\omega(X,Y) &= 2xy[(dx \wedge dz)(X,Y)] + 3x^2(dy \wedge dz)(X,Y)] \\
&= 2xy[dx(X)dz(Y) - dz(X)dx(Y)] + 3x^2[dy(X)dz(Y) - dz(X)dy(Y)] \\
&= 2xy(-xe^{xz} - 0) + 3x^2(-ze^{xz} - 0) \\
&= -2x^2ye^{xz} - 3x^2ze^{xz}.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\omega(X,Z) &= 2xy[(dx \wedge dz)(X,Z] + 3x^2(dy \wedge dz)(X,Z)] \\
&= 2xy[dx(X)dz(Z) - dz(X)dx(Z)] + 3x^2[dy(X)dz(Z) - dz(X)dy(Z)] \\
&= 2xy(x - 0) + 3x^2(z - 0) \\
&= 2x^2y + 3x^2z.
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
\eta(X,Y,Z) &= e^{xy}(dx \wedge dy \wedge dz)(X,YZ) = e^{xy}\begin{vmatrix} dx(X) & dx(Y) & dx(Z) \\ dy(X) & dy(Y) & dy(Z) \\ dz(X) & dz(Y) & dz(Z) \end{vmatrix} \\
&= e^{xy}\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ z & xy & 0 \\ 0 & -e^{xz} & 1 \end{vmatrix} \\
&= e^{xy}(x^2y - yze^{xz}).
\end{aligned}$$

[3] Siano ω una k-forma differenziale e ψ una s-forma differenziale su $\mathbb{R}^n$. Provare che
(a) se $\omega \wedge \psi = (-1)^{ks}(\psi \wedge \omega)$;
(b) se ω é una k-forma differenziale e k é dispari, allora $\omega \wedge \omega = 0$;

Soluzione. *(a) Si usa che* $\omega \wedge \psi = segno(\sigma)(\psi \wedge \omega)$, *con* $\sigma \in S_{k+s}$ *la permutazione data da*

$$\sigma = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+s \\ s+1 & \dots & s+k & 1 & \dots & s \end{array} \right]$$

e che il segno della permutazione σ *é data da* $(-1)^{ks}$.
(b) Per (a)

$$\omega \wedge \omega = (-1)^{k^2} \omega \wedge \omega,$$

ma k *é dispari, quindi* $k^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ *e di conseguenza* $(-1)^{k^2} = -1$.

[4] Dare un esempio di k-forma differenziale (con $k > 0$) per cui $\omega \wedge \omega$ non sia la forma differenziale nulla.

Soluzione. *Ad esempio la* 2*-forma differenziale* $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ *su* $\mathbb{R}^4$ *é tale che* $\omega \wedge \omega \neq 0$.

[5] Sia ω la 2-forma differenziale su $\mathbb{R}^{2n}$ data da

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calcolare il prodotto wedge (o esterno) $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ ripetuto n-volte.

[*Suggerimento:* ω^n *é una* $2n$*-forma differenziale su* $\mathbb{R}^{2n}$ *e quindi* $\omega^n = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2n}$. *Determinare la funzione* f]