Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 1 - 8 ottobre 2018

Esercizio 1. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Consideriamo la famiglia:

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } a \in A\}$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia per X.
2. Dimostrare che la topologia indotta sul sottospazio $B = X \setminus \{a\}$ è la topologia discreta.
3. Dimostrare che $C = \{a\}$ è denso, cioè $\overline{C} = X$.

Esercizio 2. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid a \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A \in \mathcal{T} \iff [x \in A \implies -x \in A]$$

(cioè $A \in \mathcal{T}$ se e solo se A è simmetrico rispetto allo 0).

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto se e solo se A è chiuso.
3. Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è né più fine né meno fine della topologia euclidea.

Esercizio 4. *(Basi, topologia)* Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e per ogni intero positivo o nullo a poniamo

$$B_a = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e cioè B_a è l'insieme dei multipli (interi) di a. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{B_a \mid a \geq 0, a \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su $\mathbb{Z}$. Indicheremo questa topologia con $\mathcal{T}$.
2. Dimostrare che se A è un aperto, non vuoto e finito allora $A = B_0 = \{0\}$.
3. Dimostrare che $C = \{-1, 1\}$ è chiuso.
4. Determinare la chiusura di $D = \{2\}$.

Esercizio 5. *(Basi, topologia)* Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \le a \le 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.
3. Dimostrare che la chiusura di $A = [1, 3/2]$ è $[1, 2)$ e che l'interno di A è l'insieme vuoto.

Esercizio 6. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.

(b) Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto $\{2\}$ e del punto $\{3\}$.

Esercizio 7. *(Definizione di topologia, chiusura, sottospazi)* Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \notin A\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Sia $Y = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, determinare la chiusura di Y in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su Y è la topologia discreta.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ degli interi naturali positivi si consideri la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B} = \{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

(NOTA BENE: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$).

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}_+$ e si determini la chiusura dell'insieme $\{10, 11, 12, 13\}$.
2. Dimostrare che $\{7\}$ non è un sottoinsieme chiuso.

Esercizio 9. Sia X uno spazio topologico.

1. Se $A, B \subseteq X$ dimostrare che
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
2. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, dimostrare che
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$
3. Sia $A_i = (1/i, 1) \subset \mathbb{R}$, con la topologia euclidea ($i \in \mathbb{N} - \{0\}$). Dimostrare che per questa famiglia l'inclusione precedente è stretta.

Esercizio 10. *(Intorni)* Mostrare che, nella topologia euclidea su $\mathbb{R}$, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, un sistema fondamentale di intorni di 0.