Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 3 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 30 ottobre 2018

Esercizio 1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) un sottoinsieme *aperto* e sia $a \in U$. Definiamo

$$C_a = \{x \in U \mid \text{ esiste un cammino contenuto in } U \text{ che congiunge } a \text{ e } x\}$$

(C_a è la *componente connessa per archi* di a).

1. Dimostrare che C_a è aperto in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
2. Dimostrare che C_a è chiuso in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.
3. Dedurre che un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Esercizio 2. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea):

- $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{Q},\ 0 \leq y \leq 1\}$
- $P = (\pi/4, 1/2)$

e poniamo

$$X = I \cup C, \qquad Y = X \cup P = I \cup C \cup P$$

1. Dimostrare che X e Y sono di Hausdorff.
2. Dimostrare che X è connesso per archi.
3. Dimostrare che Y è connesso.
4. Y è connesso per archi? (Una dimostrazione rigorosa è difficile da scrivere. Dare una buona motivazione per la risposta).

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $X = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti e dotato della topologia banale. Sia $Y = \mathbb{R} \times X$ lo spazio topologico prodotto.

1. Scrivere una base per la topologia di Y.
2. Dire se Y è T_1, se è connesso, e se è compatto.
3. Consideriamo i seguenti sottospazi di Y:

$$Z = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big([-2, 2] \times \{b\}\big),$$
$$W = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big((-2, 2) \times \{b\}\big).$$

   Stabilire se Z e W sono compatti.

Esercizio 4. Considerare le topologie degli esercizi 1–8 del foglio ESERCITAZIONI 1 (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di esse dire se lo spazio è connesso oppure è compatto.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.