Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 3 - 22 ottobre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi. Nota: è vero anche il viceversa.

Esercizio 2. Siano $n \geq 2$ e $f : S^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Denotiamo con A il sottoinsieme dei punti $t \in f(S^n)$ tali che la controimmagine $f^{-1}(t)$ è un insieme di cardinalità finita.

Dimostrare che A contiene al più due punti. Trovare tre esempi di funzioni continue tali che A abbia cardinalità 0, 1 e 2

Esercizio 3. Dimostrare che ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse e cioè: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e $C \subseteq X$ è una componente connessa di X, allora $f(C)$ è una componente connessa di Y.

Concludere che due spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.

Esercizio 4. Esempi di spazi non omeomorfi perché togliendo un punto hanno componenti connesse diverse, per esempio segmento e circonferenza, intervallo aperto, chiuso e semichiuso, retta e semiretta chiusa, piano e semipiano chiuso (non si riesce solo con i punti...), lettere dell'alfabeto

Esercizio 5. Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni n. Dimostrare che $A = \cup_n A_n$ è connesso.

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio con almeno due punti distinti con la topologia discreta. Dimostrare che X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante.

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X non è connesso se e solo se esiste una funzione $f : X \to \{0, 1\}$ *continua e suriettiva.* (Lo spazio $\{0, 1\}$ ha la topologia discreta).

Esercizio 8. Sia $X = A \cup B$, dove A e B sono connessi. Supponiamo che $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Dimostrare che X è connesso.
(Suggerimento: usare il risultato dell'esercizio precedente).

Esercizio 9. Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se gli unici sottospazi connessi sono i punti. Dimostrare che se X ha la topologia discreta, allora X è totalmente sconnesso. Trovare un esempio di spazio totalmente sconnesso che non ha la topologia discreta.