Spazi Topologici

Strutture di $\mathbb{R}^n$

1) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale di dim. n avente come base standard la n-pla di vettori
$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

2) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale Euclideo rispetto al prodotto scalare che rende la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ una base ortonormale

Quindi: se $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ allora
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
e
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3) $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico rispetto alla funzione distanza euclidea data da
$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto d(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Notare che:

a) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$,

b) $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ e $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{y}$

c) $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$
$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione distanza consente di definire gli <u>intorni sferici</u> di un punto.

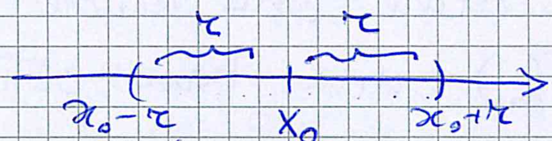
Siano: $\vec{x}_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ e $r\in\mathbb{R}_0^+$ $(r>0)$

L'intorno sferico di centro $\vec{x}_0$ e raggio r è:

$$B(\vec{x}_0;r) \overset{\text{def}}{=} \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / d(\vec{x},\vec{x}_0)<r\}$$

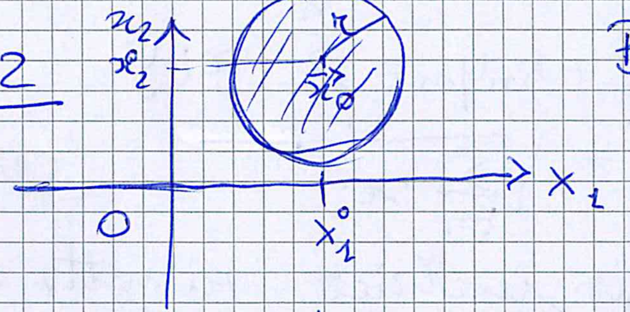
$$=\{\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n / (x_1)^2+\dots+(x_n)^2<r^2\}.$$

<u>$n=1$</u>



$B(\vec{x}_0,r)=(x_0-r,\ x_0+r)$ intervallo aperto

<u>$n=2$</u>

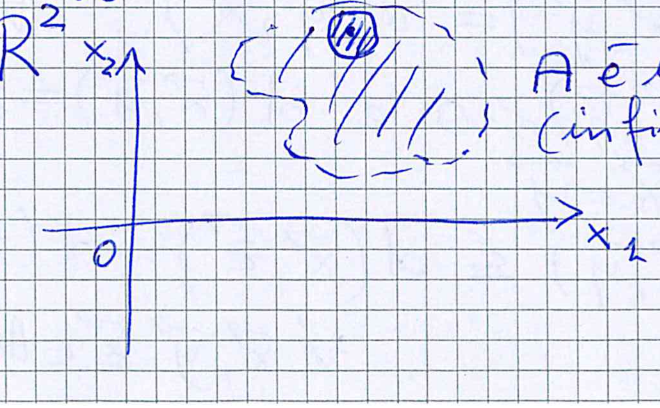


$B(\vec{x}_0,r)$: disco <u>aperto</u> di centro x_0 e raggio r

A questo punto possiamo definire gli <u>insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$</u>

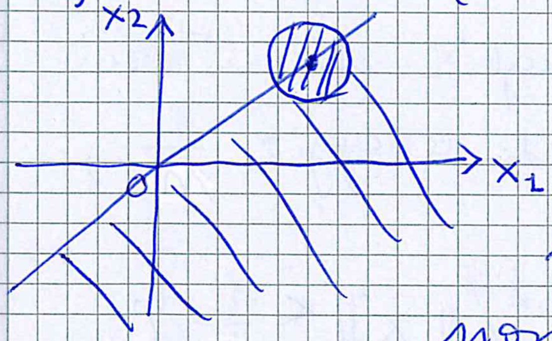
<u>Def</u>. Un insieme $A\subseteq\mathbb{R}^n$ è aperto se per <u>ogni</u> punto $\vec{x}_0\in A$, esiste un intorno sferico (di raggio opportuno) $B(\vec{x}_0;r)\subseteq A$

<u>Esempi</u> 1) $\mathbb{R}^2$



: A è unione di (infiniti) dischi aperti centrati nei punti di A

2) Sia $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \leq x_1\}$



B **non** è aperto perché **ogni** disco avente centro nei punti della retta $x_1 = x_2$ **non** è interamente contenuto in B

3) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è aperto?

Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di **tutti** i sottoinsiemi **aperti** di $\mathbb{R}^n$. Valgono le seguenti proprietà

Proprietà 1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti

2) Se $A_i \in \mathcal{T}$, con $i \in I$, è una famiglia (finita o infinita) di aperti, allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

(l'unione di aperti è sempre un aperto)

3) Se $A_1, \ldots, A_k$ è una famiglia **finita** di aperti, allora

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_k \in \mathcal{T}$$

(l'intersezione di un numero **finito** di aperti è un aperto)

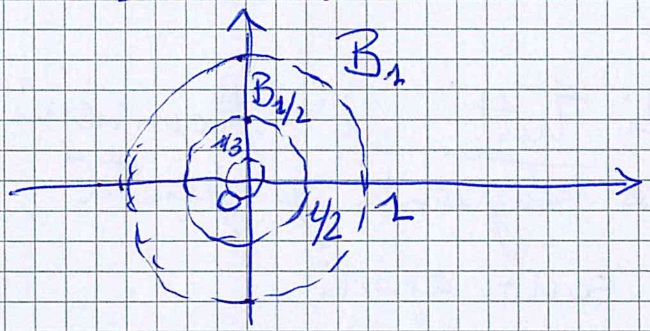
Notare che: l'intersezione di un numero infinito di aperti $\boxed{\text{può}}$ **non** essere aperto. Per esempio:

$\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$

Consideriamo la famiglia di intorni aperti dell'origine e di raggio $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$:

$$B_k\left(\vec{0}; \frac{1}{k}\right) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 / \|\vec{x}\| < \frac{1}{k} \right\}$$

Sono tutti dischi concentrici:



Sia

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\left(\vec{0}, \frac{1}{k}\right) = \{\vec{0}\}$$

che <u>NON</u> è aperto.

Inoltre, possiamo definire la <u>continuità</u> di funzioni tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione
$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$

<u>Def.</u> f è <u>continua in $x_0 \in \mathbb{R}^n$</u> se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ (che dipende ovviamente da ε) tale che se $\vec{x} \in B(\vec{x}_0; \delta)$ allora

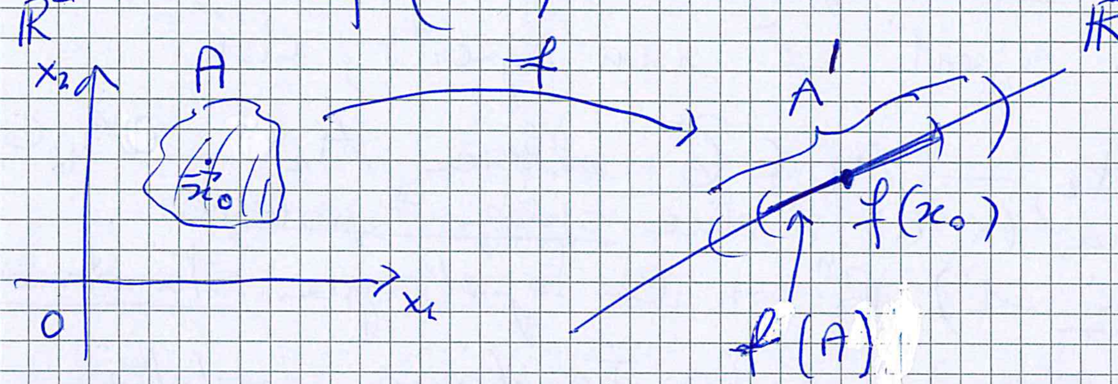
$$f(\vec{x}) \in B(f(\vec{x}_0); \varepsilon)$$

Intuitivamente: f manda punti "vicini" a $\vec{x}_0$ in punti "vicini" a $f(\vec{x}_0)$.

Non è difficile provare che vale la seguente condizione equivalente alla continuità:

<u>Teorema</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se per <u>ogni</u> aperto A' di $\mathbb{R}^m$ contenente $f(\vec{x}_0)$ esiste un aperto A di $\mathbb{R}^n$ contenente $\vec{x}_0$, tale che

$$f(A) \subseteq A'.$$



A questo punto, possiamo introdurre le nozioni generali di spazio topologico, insieme aperto e funzioni continue avendo in mente cosa succede in $\mathbb{R}^n$ quando ci si "dimentica" della struttura di spazio vettoriale e di distanza Euclidea.

Sia X un insieme. Indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X, cioè la famiglia di <u>tutti</u> i sottoinsiemi di X.

<u>Def.</u> Una <u>Topologia</u> su X è una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X, detti

aperti di X (e quindi $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$)
che verifica le seguenti condizioni

1) $\emptyset$ e X sono aperti (cioè $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$)

2) l'unione arbitraria di aperti è un aperto, cioè:
se $A_i \in \tau$, $i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

3) l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto, cioè
se $A_1, \dots, A_k \in \tau$ allora $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \tau$.

La coppia (X, τ) si dice spazio topologico.

Esempi 1) $\mathbb{R}^n$ con la topologia standard (o Euclidea): è la topologia indotta dalla distanza Euclidea vista in precedenza.

$n=1$: in $\mathbb{R}$ gli aperti sono le unioni di intervalli aperti

$n=2$: in $\mathbb{R}^2$ gli aperti sono unioni di dischi aperti

2) Ogni insieme X possiede sempre almeno due topologie:

a) la topologia banale: è quella in cui gli unici due aperti sono $\emptyset$ e X stesso. È la topologia con il minor numero possibile di aperti. Quindi $\tau = \{\emptyset, X\}$.

b) la topologia discreta: è quella in

cui <u>ogni</u> sottoinsieme di X è aperto e quindi $\tau = \mathcal{P}(X)$.
È la topologia con il <u>maggior</u> numero possibile di aperti.

3) Topologia della <u>semicontinuità superiore</u> su $\mathbb{R}$: gli aperti non vuoti sono gli intervalli illimitati inferiormente, cioè del tipo

$$(-\infty, a) \quad , \text{ con } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

<u>Def.</u> Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è <u>chiuso</u> se il suo complementare $X \setminus C = \{x \in X / x \notin C\}$ è aperto.

<u>Esempi</u> 1) $\mathbb{R}^2$ con la topologia standard

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - 2x_2 + 1 = 0\}$$
$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}$$
$$C_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \leq x_2\}$$
$$C_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 \leq x_2\}$$

sono chiusi. Esempi analoghi valgono in $\mathbb{R}^n$. In generale in $\mathbb{R}^n$ sono certamente chiusi:

a) l'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzione di un'<u>equazione algebrica</u> in n variabili: sono le sottovarietà algebriche di $\mathbb{R}^n$;

b) l'insieme dei punti le cui coordinate verificano un disequazione <u>non</u> stretta (quelle con "$\leq$")

Si ha:

<u>Teorema</u> X sp. topologico

1) $\emptyset$ e X sono chiusi

2) l'<u>intersezione</u> di un numero <u>qualsiasi</u> (finito o infinito) di chiusi è un chiuso

3) l'<u>unione</u> di un numero <u>finito</u> di chiusi è chiuso.

<u>Dim.</u> Si usano le formule di De Morgan:

sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus C_i)$$

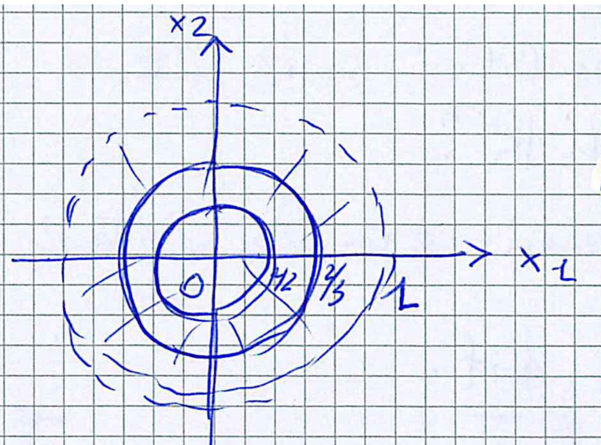
$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus C_i).$$

(dimostrarle per esercizio)

<u>Oss.</u> 1) In certi casi, l'intersezione di un numero infinito di chiusi <u>può non</u> essere chiusa. Esempio:

$$\mathbb{R}^2, \quad C_K = \overline{B\left(\vec{O}, \frac{K}{K+1}\right)} \overset{def}{=} \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1^2+x_2^2 \leq \frac{K}{K+1}\right\}, K\in\mathbb{N}, K\geq 1$$

I C_K sono dischi chiusi di centro l'origine e raggio $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$. Tale successione tende a 1 per $K \to +\infty$ e quindi



$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k = B(\vec{O}; 1)$$

che è un aperto!

2) E' possibile definire una topologia mediante i chiusi: in tal caso, le tre condizioni del teorema precedente diventano gli assiomi.

Esempio (importante): la topologia di Zariski per le varietà algebriche.

Sia $\mathbb{K}$ un campo (pensare a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$, p primo). Fissato un intero $n > 0$ sia $\mathbb{K}[x_1, -, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Per ogni $f \in \mathbb{K}[x_1, -, x_n]$, sia

$$V(f) = \{(a_1, -, a_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, f(a_1, -, a_n) = 0\}.$$

Vogliamo costruire una topologia su $\mathbb{K}^n$ in modo tale che i chiusi siano tutte le possibili intersezioni degli insiemi $V(f)$, al variare di f in $\mathbb{K}[x_1, -, x_n]$. In altri termini, i chiusi saranno i sottoinsiemi formati dai punti di $\mathbb{K}^n$ le cui coordinate sono soluzioni di sistemi (anche infiniti) di polinomi in n variabili: sono le <u>sottovarietà algebriche</u> di $\mathbb{K}^n$.

Consideriamo gli insiemi complementari dei vari $V(f)$:

$$D(f) = \mathbb{K}^n \setminus V(f) \overset{\text{def.}}{=}$$
$$= \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, f(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}$$

Notare che:

a) $D(0) = \emptyset$ e $D(1) = \mathbb{K}^n$, dato che $V(0) = \mathbb{K}^n$ e $V(1) = \emptyset$.

b) $D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g)$, $\forall f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Quindi: gli <u>aperti</u> della topologia di Zariski saranno, per definizione, le <u>unioni</u> di un numero <u>qualsiasi</u> di insiemi $D(f)$, $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Ovviamente, i <u>chiusi</u> saranno tutti e soli del tipo seguente:

sia $E \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (insieme finito o infinito di polinomi)

$$V(E) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{f \in E} V(f) =$$
$$= \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, f(a_1, \dots, a_n) = 0, f \in E\}$$

(insieme delle soluzioni comuni a tutti i polinomi di E).

Nell'esempio precedente, abbiamo visto che per definire una topologia non è necessario definire "tutti" gli aperti: è sufficiente definire solo alcuni aperti. Questa famiglia darà origine ad una topologia solo se sono verificate le condizioni a) e b) viste in precedenza.

<u>Def</u>: Sia $\mathcal{T}$ una topologia su X. Una sottofamiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ è una <u>base</u> di $\mathcal{T}$ se ogni aperto di $\mathcal{T}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

<u>Esempi</u> 1) In $\mathbb{R}^n$, la famiglia di tutti gli intorni sferici $B(\vec{x}; r)$, al variare di $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+_0$, è una base della topologia euclidea.

2) La famiglia $D(f)$, al variare di f in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ è una base della topologia di Zariski.

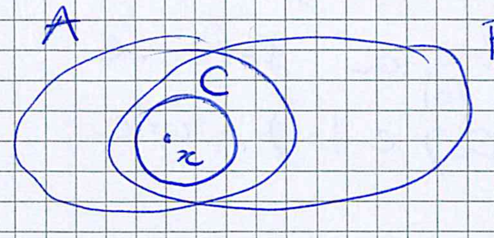
Quando un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ è base di una topologia su X?

<u>Teorema</u> Siano X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi. Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e solo se valgono le seguenti condizioni

1) X è unione dei sottoinsiemi che stanno in $\mathcal{B}$;

2) per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni

punto $x \in A \cap B$ esiste un $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$.



, $A, B, C \in \underline{\mathcal{B}}$

<u>Dim.</u> Se $\mathcal{T}$ è una topologia di cui $\mathcal{B}$ è una base, ovviamente le condizioni 1) e 2) sono verificate e quindi 1) e 2) sono necessarie. Vediamo che sono anche sufficienti: sia $\mathcal{T}$ la famiglia formata da tutte le unioni possibili di sottoinsiemi di $\mathcal{B}$. Verifichiamo che se valgono 1) e 2) allora $\mathcal{T}$ soddisfa ai tre assiomi che definiscono una topologia.

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ (è unione vuota di elementi di $\mathcal{B}$)
  $X \in \mathcal{T}$ (per la condizione 1))
- La condizione sull'unione di elementi di $\mathcal{T}$ è banalmente verificata.
- Siano $A, B \in \mathcal{T}$. Per costruzione, si ha:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad B = \bigcup_{j \in J} B_j \quad \text{con } A_i, B_j \in \mathcal{B}.$$

Allora:

$$A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j),$$

Dato che, per la condizione 2),

$$A_i \cap B_j = \bigcup \{ C \in \mathcal{B} \,/\, C \subseteq A_i \cap B_j \}$$

si ha: $A \cap B = \bigcup \{ C \in \mathcal{B} \,/\, C \subseteq A_i \cap B_j,\ (i,j) \in I \times J \}$

e quindi $A \cap B \in \mathcal{T}$. Ovviamente, vale la stessa conclusione per l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{T}$.

Esempi: 1) Gli intorni sferici aperti $B(\vec{x}, r)$, al variare di $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, formano una base per la topologia Euclidea di $\mathbb{R}^n$.

2) I sottoinsiemi del tipo $D(f)$, con $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, sono una base per la topologia di Zariski.

Le diverse topologie su uno stesso insieme possono essere confrontate fra di loro.

Def. Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ su X, $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$, cioè se in $\mathcal{T}$ ci sono più aperti che in $\mathcal{T}'$.

Es. 1) $\left.\begin{array}{l} \mathcal{T}_1 : \text{topologia banale} \\ \mathcal{T}_2 : \text{topologia discreta} \end{array}\right\}$ su X

Si ha: $\mathcal{T}_2$ più fine di ogni topologia su X
$\mathcal{T}_1$ è meno fine di ogni topologia su X

2) $X = \mathbb{R}$
$\mathcal{T}_1$: topologia standard o Euclidea
$\mathcal{T}_2$: topologia della semicontinuità superiore

Qual è la topologia più fine?

3) Topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$

τ_3 è la topologia che ha come base di aperti tutti gli intervalli semi-chiusi

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Si ha:

$$(a, b) = \bigcup_{c > a} [c, b)$$

e quindi τ_3 è più fine della topologia Euclidea.

Chiusura, interno e frontiera di un insieme

Sia (X, τ) uno sp. topologico

Def. Sia B un sottoinsieme di X

1) La chiusura di B, che si indica con $\overline{B}$, è il più piccolo insieme chiuso di X che contiene B. Ciò equivale a dire che:
$\overline{B}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono B:

$$\overline{B} = \bigcap \{C / C \text{ è chiuso e } C \supseteq B\}$$

I punti di $\overline{B}$ si dicono punti aderenti a B.

2) L'interno di B (o parte interna di B), che si indica con $\mathring{B}$, è il più grande insieme aperto contenuto in

B. Ciò equivale a dire che:

$\mathring{B}$ è l'unione di tutti gli aperti contenuti in B:

$$\mathring{B} = \bigcup \{A \,/\, A \text{ è aperto e } A \subseteq B\}$$

I punti di $\mathring{B}$ si dicono punti interni di B

3) La frontiera di B è il sottoinsieme chiuso $\partial B = \overline{B} - \mathring{B} = \overline{B} \cap \overline{(X-B)}$

Notare che ∂B è l'insieme dei punti che sono aderenti sia a B che a $X-B$.

Esempi: 1) $\mathbb{R}$, Topologia Euclidea

a) $B=(a,b)$ è un aperto

Chiusura di (a,b): $\overline{(a,b)} = [a,b]$

Interno di (a,b): $\mathring{\overline{(a,b)}}$ $\mathring{(a,b)} = (a,b)$

Frontiera di (a,b): $\partial(a,b) = \{a,b\}$

b) $B=[a,b)$

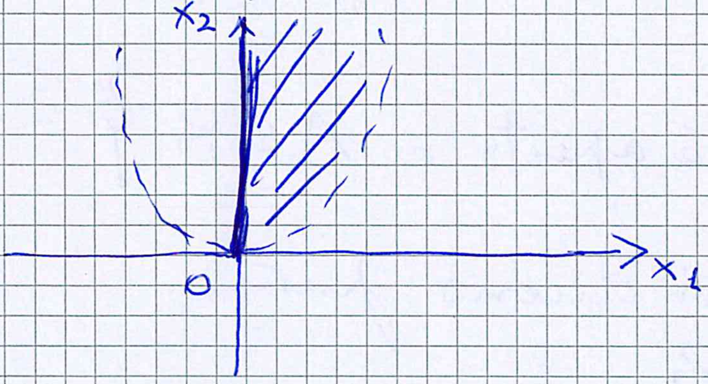
$\overline{B} = [a,b]$, $\mathring{B} = (a,b)$, $\partial B = \{a,b\}$

c) $B = [a,+\infty)$ (è chiuso)

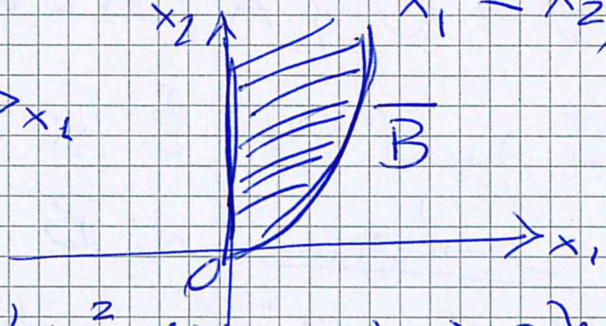
$\overline{B} = B = [a,+\infty)$, $\mathring{B} = (a,+\infty)$, $\partial B = \{a\}$

2) $\mathbb{R}^2$

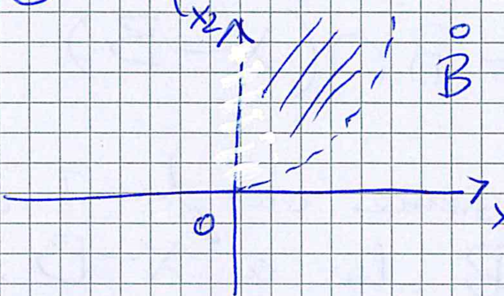
$B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / \ x_1^2 < x_2, \ x_1 \geq 0\}$



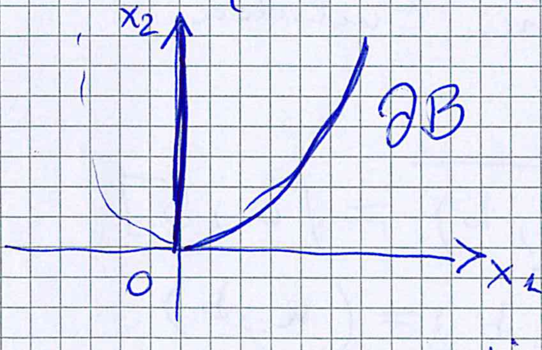
$\overline{B}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / \ x_1^2 \leq x_2, \ x_1 \geq 0\}$



$\mathring{B}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / \ x_1^2 < x_2, \ x_1 > 0\}$



$\partial B=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / \ x_1^2 = x_2\} \cup \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / \ x_1 = 0\}$



Valgono le seguenti

<u>Proprietà</u> $B\subseteq X$, $D\subseteq X$

1) Se $B\subseteq D$ allora $\overline{B}\subseteq\overline{D}$

2) B è chiuso se e solo se $B=\overline{B}$

3) $B_i\subseteq X$, $i\in I$. Allora $\bigcup_{i\in I}\overline{B_i}=\overline{\bigcup_{i\in I}B_i}$

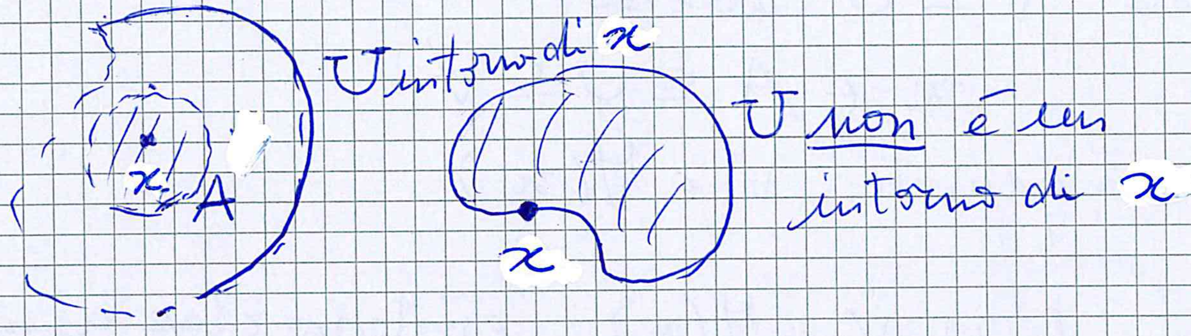
4) B è aperto <u>se e solo se</u> $B=\mathring{B}$.

5) $X-\mathring{B}=\overline{X-B}$. (esercizio)

<u>Def.</u> (X, τ) sp. topologico

Sia $x \in X$ un suo punto. Un sottoinsieme U di X si dice <u>intorno di x</u> se esiste un <u>aperto</u> A di X tale che:

$$x \in U \quad e \quad A \subseteq U.$$



Indichiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di <u>tutti</u> gli <u>intorni di x</u>.

<u>Proprietà</u> $B \subseteq X$

Allora $\mathring{B} = \{x \in B \,/\, B \in \mathcal{I}(x)\}$, cioè: l'intorno di B è l'insieme di tutti i punti di cui B è intorno.

In particolare: B è aperto se e solo se B è intorno di ogni suo punto.

<u>Lemma</u>

1) Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subseteq V$ allora $V \in \mathcal{I}(a)$

cioè: se U è intorno di x, ogni insieme che contiene U è ancora intorno di x.

2) Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$ allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$
cioè: l'intersezione di intorni di x è ancora un intorno di x.

Dim. 1) Se U è intorno di x, esiste un aperto A tale che $x \in A \subseteq U$.

Se $V \supseteq U$ allora

$$x \in A \subseteq U \subseteq V$$

e quindi $V \in \mathcal{I}(x)$.

2) Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$, esistono due aperti A e A' tali che:

$$x \in A \subseteq U \quad e \quad x \in A' \subseteq V$$

Quindi

$$x \in A \cap A' \subseteq U \cap V.$$

Dato che $A \cap A'$ è aperto, $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$.

Il lemma seguente caratterizza i punti aderenti di un sottoinsieme B.

Lemma Sia $B \subseteq X$.

Allora $x \in \overline{B}$ (cioè x è aderente a B) se e solo se ogni intorno U di x contiene punti di B e quindi:

$$\overline{B} = B \cup \partial B.$$

Dim. Dobbiamo dimostrare che

$$x \in \overline{B} \iff \forall\, U \in \mathcal{I}(x),\ U \cap B \neq \emptyset .$$

Ciò equivale a provare che (negazione dell'equivalenza precedente):

$$x \notin \overline{B} \iff \exists\, U \in \mathcal{I}(x),\ U \cap B = \emptyset .$$

Allora:

$$x \notin \overline{B} \overset{\text{def. di chiusura}}{\iff} x \notin \bigcap \{ C \,/\, C \text{ chiuso},\ C \supseteq B \}$$

$$\iff x \in X \setminus \bigcap \{ C \,/\, C \text{ chiuso},\ B \subseteq C \}$$

leggi di De Morgan

$$\iff x \in \bigcup \{ X \setminus C \,/\, C \text{ chiuso},\ B \subseteq C \}$$

$$\iff x \in \bigcup \{ \overset{=A}{X \setminus C} \,/\, C \text{ chiuso},\ X \setminus B \supseteq \underset{=A}{X \setminus C} \}$$

Se $B \subseteq C$ allora $X \setminus B \supseteq X \setminus C$ perché?

(Se C è chiuso allora $X \setminus C = A$ è aperto)

$$\iff x \in \bigcup \{ A \,/\, A \text{ aperto},\ A \subseteq X \setminus B \}$$

$$\iff x \in \overset{\circ}{(X \setminus B)} \iff \text{per definizione di interno}$$

$$\iff \exists\, U \in \mathcal{I}(x),\ x \in U \subseteq X \setminus B$$

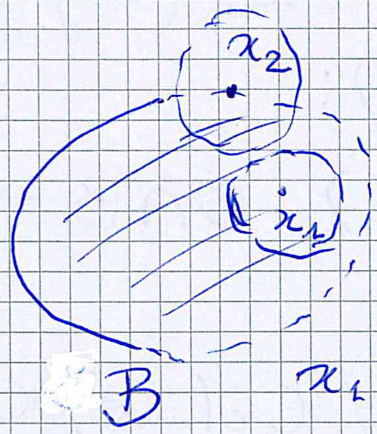
$$\iff \exists\, U \in \mathcal{I}(x),\ U \cap B = \emptyset .$$

Riassumendo, abbiamo che:

a) x è <u>interno</u> a $B \iff$ esiste un intorno di x contenuto in B.

b) x é <u>aderente</u> a $B \Longleftrightarrow$ ogni intorno di x contiene punti di B

c) x é un punto della <u>frontiera</u> $\Longleftrightarrow$ ogni intorno di x contiene sia punti di B che punti del complementare di B. (punti "esterni" a B)



x_1: pt. interno a B

x_2: pt. aderente a B ($x_2 \notin B$) e punto di frontiera di B

Anche per gli intorni di un punto si può parlare di base (locale)

<u>Def.</u> X sp. Topologico e $x \in X$

Una <u>base locale</u> in x (oppure: un sistema fondamentale di intorni di x) é una sottofamiglia $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(x)$ di intorni di x tali che, se $U \in \mathcal{I}(x)$ allora esiste un $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subseteq U$.

<u>Esempi</u> 1) $X = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. La sottofamiglia $\mathcal{J} = \{ B(\vec{x}; r), r \in \mathbb{R}, r > 0 \}$ degli intorni sferici é una base locale in $\vec{x}$.

2) X sp. Topologico, $\mathcal{B}$: base della Topologia di X, $x \in X$ pt. fissato

$\mathcal{J} = \{ A \in \mathcal{B} \ / \ x \in A \}$ é una base locale in x.

Valgono le seguenti proprietà per $\mathcal{I}(x)$

<u>Proprietà</u> X sp. topologico

1) $X \in \mathcal{I}(x)$, per ogni $x \in X$

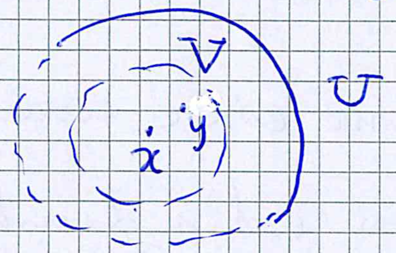
2) $x \in U$, per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$

3) Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \supseteq U$, allora $V \in \mathcal{I}(x)$

4) Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$

5) Se $U \in \mathcal{I}(x)$, esiste un sottoinsieme $V \subseteq U$ tale che $x \in V$ e $V \in \mathcal{I}(y)$, per ogni $y \in V$

<u>Dim.</u> esercizio



Si prova che:

assegnata, per ogni $x \in X$, una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi che verifica le condizioni 1), ..., 5) esiste un'<u>unica</u> topologia su X, rispetto alla quale $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x, per ogni $x \in X$.

Quindi: si può definire una topologia assegnando gli <u>intorni</u> (invece degli aperti), richiedendo che 1), ..., 5) siano gli <u>assiomi</u>.

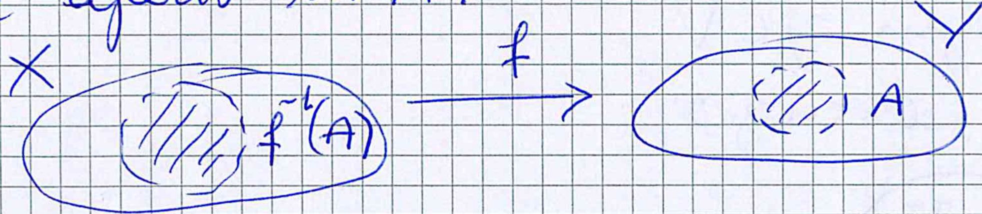
Funzioni continue

Siano X, Y due spazi topologici

Def. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se, per ogni aperto $A \subseteq Y$, l'insieme delle controimmagini di A

$$f^{-1}(A) \overset{def.}{=} \{ x \in X / f(x) \in A \}$$

è aperto in X.



Le funzioni continue possono essere caratterizzate mediante i chiusi, le basi ed i punti di aderenza.

Teorema 1) $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni chiuso $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

2) Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$, l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X.

3) $f : X \to Y$ è continua se e solo se

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \text{ per ogni sottoinsieme } A \subseteq X.$$

(Significa che f continua "non fa strappi", cioè manda punti aderenti ad A in punti aderenti a $f(A)$.

Dim. 1) Si usa il fatto che, per ogni funzione $f : X \to Y$ e per ogni sottoinsieme $B \subseteq Y$, si ha:

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

(Perché?)

2) Si usa il fatto che, per ogni funzione $f : X \to Y$ e per ogni famiglia $\{B_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di Y, si ha:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

3) Ipotesi: $f : X \to Y$ continua

Tesi: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$.

Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi. Allora $\overline{f(A)}$ è un chiuso di Y $\Rightarrow$ per ipotesi e per la 1) precedente, si ha:

$f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso di X che contiene A (perché?)

Quindi: $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ (per definizione di chiusura)

da cui:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Viceversa: Ipotesi: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, per ogni $A \subseteq X$

Tesi: f continua

Sia $C \subseteq Y$ un chiuso. Proveremo che $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X. Ovviamente, $f^{-1}(C)$ è un sottoinsieme di X e, quindi, per ipotesi:

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C} =$$
$$= C \text{ (perché } C \text{ è chiuso)}$$

Pertanto:
$$\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$$

Ciò implica che $f^{-1}(C)$ sia chiuso in X (per definizione di chiusura) e quindi f è continua (per la 1)).

La definizione di continuità che è stata data è globale. Però esiste anche una definizione locale di continuità che è equivalente alla precedente.

Def. $f: X \to Y$ è continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni intorno V di $f(x_0)$, esiste un intorno U di x_0 tale che:
$$f(U) \subseteq V.$$

Teorema $f: X \to Y$ è continua se e solo se è continua in ogni punto di X.

Dim. Sia $f: X \to Y$ continua e sia $x_0 \in X$. Dato un intorno V di $f(x_0)$, per definizione di intorno, esiste un aperto $A \subseteq Y$ tale che
$$f(x_0) \in A \subseteq V.$$
Per ipotesi, $f^{-1}(A)$ è un aperto di X e

$x_0 \in f^{-1}(A)$. Posto $U = f^{-1}(A)$, si ha che: U è un intorno di x_0 e

$$f(U) \subseteq A \subseteq V.$$

Viceversa, supponiamo che $f: X \to Y$ sia continua in ogni punto $x \in X$.

Sia $A \subseteq Y$ un aperto di Y. Proveremo $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto e quindi $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

Sia $x \in f^{-1}(A)$, allora $f(x) \in A$ e A è un intorno di $f(x)$, perché A è aperto.

Per ipotesi ("f continua in x"), esiste un intorno U di x tale che:

$$f(U) \subseteq A,$$

ossia:

$$x \in U \subseteq f^{-1}(A).$$

Quindi: $f^{-1}(A)$ contiene un intorno di ogni suo punto e, di conseguenza, $f^{-1}(A)$ è aperto.

Siano: X, Y, Z spazi topologici e

$$f: X \to Y \text{ e } g: Y \to Z$$

due funzioni continue. Allora

Proprietà: $g \circ f : X \to Z$ è una funzione continua, cioè la composizione di funzioni continue è continua.

Dim. Sia $A \subseteq Z$ un aperto. Dato che g è continua, $g^{-1}(A) \subseteq Y$ è un aperto.

Dato che f è continua, anche

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) \subseteq X \text{ è un aperto.}$$
$$= (g \circ f)^{-1}(A) \quad (\text{perché?})$$

Quindi: $g \circ f$ è continua.

Def. Sia $f: X \to Y$ una funzione qualsiasi tra spazi topologici.

1) f è aperta se manda aperti di X in aperti di Y, cioè se, per ogni aperto A di X, $f(A)$ è un aperto di Y

2) f è chiusa se manda chiusi di X in chiusi di Y, cioè se, per ogni chiuso C di X, $f(C)$ è un chiuso di Y.

3) $f: X \to Y$ è un $\boxed{\text{omeomorfismo}}$ se:

a) f è continua anche

b) f è invertibile e la sua funzione inversa $f^{-1}: Y \to X$ è continua.

Oss. Dire che f è un omeomorfismo equivale a dire che esiste una funzione continua $g: Y \to X$ tale che

$g \circ f = id_X : X \to X$ e
$f \circ g = id_Y : Y \to Y$ siano continue.

Due spazi topologici omeomorfi verranno identificati e pensati come uno stesso spazio topologico. In tal caso, si scrive:

$$X \simeq Y.$$

Vale la seguente:

<u>Proprietà</u> Sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) f è un omeomorfismo
2) f è chiusa e biettiva
3) f è aperta e biettiva.

<u>Dim.</u> Proveremo che $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$

$1) \Rightarrow 2)$ Ovvio perché dire che f è invertibile equivale a dire che f è biettiva. Inoltre, $g \overset{def}{=} f^{-1} : Y \to X$ è continua. Quindi, se $C \subseteq X$ è un chiuso, allora $g^{-1}(C)$ è un chiuso di Y.

Dato che $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$, si ha che $f(C)$ è un chiuso di Y, cioè f è chiusa.

$2) \Rightarrow 3)$ Proviamo che f è aperta.
Sia A X un aperto, quindi $C = X \setminus A$ è

chiuso in X. Quindi:

$$f(A) = f(X \setminus C) \overset{\text{perché } f \text{ è biettiva}}{=} Y - f(C)$$

Per ipotesi, $f(C)$ è chiuso in Y e quindi $f(A)$ è aperta.

3) $\Rightarrow$ 1) Basta provare che la funzione inversa di f, cioè $g \overset{\text{def}}{=} f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Sia $A \subseteq Y$ un aperto. Allora:

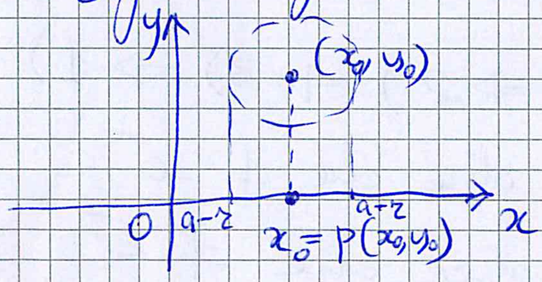
$$g^{-1}(A) = f(A)$$

è aperto perché f è aperta per ipotesi.

<u>Esempio</u>

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto p(x,y) = x$$

proiezione sul primo fattore



Si ha che:

a) p è aperta

b) p non è chiusa.

a) Sia $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$.

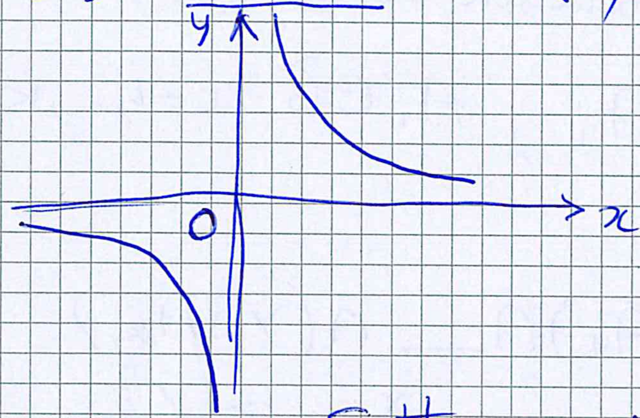
Allora
$$p(B(a;r)) = (a-r, a+r) \text{ aperto}$$

Dato che ogni aperto A di $\mathbb{R}^2$ è unione di intorni sferici, $p(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}$.

b) Si consideri il grafico dell'iperbole equilatera $xy = 1$:

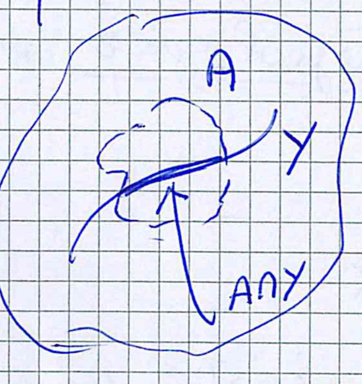
$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 1/x \}$$

E' un chiuso di $\mathbb{R}^2$, ma $p(C) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ che è un aperto di $\mathbb{R}^2$



Sottospazi topologici

Siano (X, τ) uno spazio topologico e Y un qualsiasi sottoinsieme di X.



Consideriamo la famiglia dei sottoinsiemi di Y

Sia $\tau' \overset{def.}{=} \{ Y \cap A$, per ogni $A \in \tau$ aperto di $Y \}$

Proprietà τ' è una topologia su Y

Dim.

a) $\emptyset = \underset{\in \tau'}{Y \cap \emptyset}$, $Y = \underset{\in \tau'}{Y \cap X}$

b) Sia $\{A'_i\}_{i \in I}$ una famiglia di elementi di τ'. Per definizione:

$$A'_i = Y \cap A_i \text{, con } A_i \text{ aperto di } X$$

Allora:

$$\bigcup_{i \in I} A'_i = \bigcup_{i \in I} (Y \cap A_i) \overset{\text{proprietà distributive di } \cup \text{ e } \cap}{=} Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \in \tau' \text{ perché}$$

$\bigcup_{i \in I} A_i$ è un aperto di $\mathcal{T}$.

c) Siano $A'_1, \dots, A'_k$ elementi di $\mathcal{T}'$.

Quindi $A'_i = Y \cap A_i$, $A_i \in \mathcal{T}$, $i = 1, \dots, k$

Allora

$$A'_1 \cap \dots \cap A'_k = (Y \cap A_1) \cap \dots \cap (Y \cap A_k)$$
$$= Y \cap \underbrace{(A_1 \cap \dots A_k)}_{\text{aperto di } Y} \in \mathcal{T}'$$

<u>Def.</u> Il sottoinsieme Y, con la topologia $\mathcal{T}'$, si dice <u>sottospazio topologico</u> di X.

Notare che:

1) Sia Y un sottosp. topol. di X.

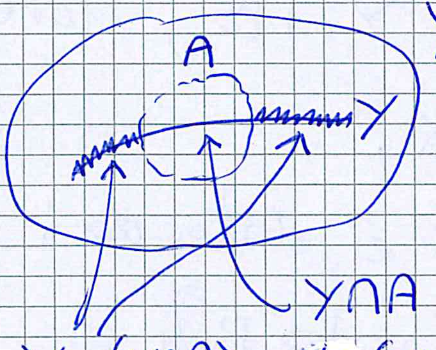
A' è un aperto di Y se e solo se esiste un aperto A di X tale che

$$A' = Y \cap A.$$

2) C' è un chiuso di Y se e solo se esiste un chiuso C di X e $C' = Y \cap C$.

Infatti:

C' chiuso in $Y \iff C' = Y - A'$, con A' aperto in $Y \iff C' = Y - (Y \cap A)$, con A aperto di $X \iff C' = Y - (Y \cap A) =$
$= Y \cap (X - A)$ vedi disegno



$Y-(Y\cap A)=Y\cap(X-A)$

Dato che $X\setminus A$ è chiuso in X, $C'=Y\cap(X-A)$ è aperto in Y.

3) Se $\mathcal{B}$ è una base per la topologia di X, allora
$$\mathcal{B}'=\{Y\cap A \,/\, A\in\mathcal{B}\}$$
è una base di Y

4) La <u>funzione inclusione</u> : $Y\subseteq X$
$$i: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto i(y)=y$$
è continua. Infatti, se $A\subseteq X$ è un aperto, $i^{-1}(A)=Y\cap A$ è un aperto di Y.

Infatti: si può dimostrare che la topologia di un sottospazio è la topologia <u>meno fine</u> che rende l'inclusione una funzione continua.

Cosa succede per la chiusura di sottoinsiemi di Y?

<u>Proprietà</u> Sia Y un sottosp. topologico di X.
Dato un sottoinsieme $B\subseteq Y$, la chiusura

di B in Y è data da $Y \cap \overline{B}$, dove $\overline{B}$ è la chiusura di B in X.

<u>Dim.</u> La chiusura di B in Y è data da:

$$\bigcap \left\{ C' \text{ chiuso } \underline{\text{in } Y} \text{ e } C' \supseteq B \right\} =$$

$$= \bigcap \left\{ C' = Y \cap C,\ C \text{ chiuso } \underline{\text{in } X} \text{ e } Y \cap C \supseteq B \right\}$$

Dato che $Y \cap C \supseteq B$ se e solo se $C \supseteq B$ (perché?), si ha che la chiusura di B in Y è

$$\bigcap \left\{ Y \cap C,\ C \text{ chiuso in } X \text{ e } C \supseteq B \right\}$$

$$\overset{\text{proprietà associativa di } \cap}{=} Y \cap \underbrace{\bigcap \left\{ C \text{ chiuso in } X \text{ e } C \supseteq B \right\}}_{= \overline{B}}$$

$$= Y \cap \overline{B} \leftarrow \text{chiusura di } B \text{ in } X.$$

<u>Def.</u> Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione <u>continua</u> e <u>iniettiva</u>.

f si dice <u>immersione (topologica)</u> di X in Y se gli aperti di X sono tutti e soli del tipo

$$f^{-1}(A), \text{ con } A \text{ aperto in } Y.$$

Notare che:

a) se f è un'immersione, X ha la topologia meno fine che rende f continua.

b) $f: X \to Y$ è un'immersione se e solo se f induce un omeomorfismo tra X ed il sottospazio topologico $f(X)$.
In tal caso, si può identificare X con $f(X)$ e pensare X come un sottospazio di Y.

<u>Attenzione</u>: ci sono funzioni continue ed iniettive che <u>non</u> sono immersioni.

<u>Esempi</u>: 1) $X = (\mathbb{R}$, topologia euclidea$)$
$Y = (\mathbb{R}$, topologia banale$)$

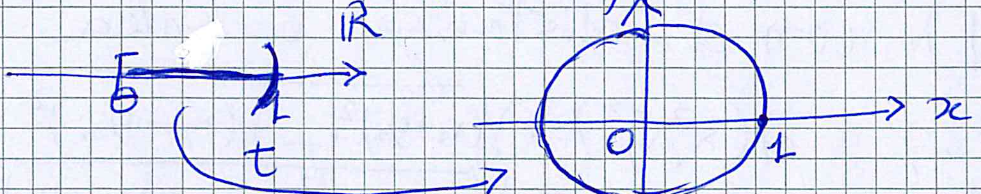
$$i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{funzione identità}$$
$$x \longmapsto i(x) = x$$

- i è continua perché $i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $i^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sono aperti
- i non è un'immersione perché X possiede infiniti aperti diversi da $\emptyset$ e $\mathbb{R}$

2) $X = [0,1)$ topologia indotta dalla topologia Euclidea di $\mathbb{R}$

$Y = \mathbb{R}^2$

$$f: [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$



non è un'immersione per, per esempio, $[0, \frac{1}{2})$, che è un aperto di X, non è controimmagine di nessun aperto di Y.

Spazi metrici

Sia X un insieme.

Def. Una distanza (o una metrica) su X è una funzione
$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
tale che:

1) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in X$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$.
2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$.
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$.
   (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio metrico è la coppia (X, d) con d distanza su X.

Esempi: 1) X insieme qualsiasi
La distanza banale è la funzione
$$d : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) \overset{def}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

2) $(\mathbb{R}^n, d)$ con d: distanza euclidea

$\vec{x} = (x_1, -, x_n)$
$\vec{y} = (y_1, -, y_n)$
$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \_\_ + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \_\_ + |x_n-y_n|^2}$$

3) Su $\mathbb{R}^n$ si possono definire altre distanze oltre a quella Euclidea

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) \overset{def.}{=} |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max_{1\le i\le n} \{|x_i-y_i|\}$$

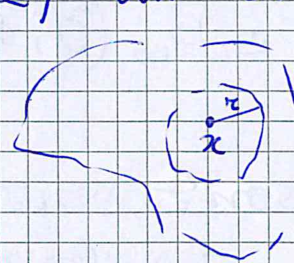
Notare che:
$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{y}) \le d_1(\vec{x},\vec{y}),$$
$$\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Ogni spazio metrico è anche uno spazio topologico.

Sia (X,d) uno spazio metrico.

Def. 1) L'intorno sferico di centro $x \in X$ e raggio r, $r \in \mathbb{R}^+_0$, è il sottoinsieme
$$B(x;r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

2) Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è aperto se, per ogni $x \in A$, esiste $r > 0$, tale che $B(x;r) \subseteq A$.



Si verifica che (esercizio!) l'insieme $\mathcal{T}$ degli aperti di tipo precedente è una topologia su X, detta topologia metrica o topologia indotta dalla distanza d.

Esercizi (X, d) spazio metrico, con la topologia metrica

1) Se $x \in X$ e $r > 0$, il sottoinsieme

$$C = \{ y \in X \,/\, d(x, y) \leq r \}$$

è chiuso ma, in generale, non coincide con la chiusura di $B(x; r)$

Controesempio: (X, d) con d distanza banale.

2) Se (X, d), e (Y, d') sono due spazi metrici e $f : X \to Y$ è una funzione, $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se $d(x, y) < \delta$ allora $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, $\forall x, y \in X$.

3) Chi sono gli intorni sferici di $(\mathbb{R}^n, d_1)$ e $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$

Suggerimento: esaminare il caso $n = 2$, $\vec{x} = \vec{0}$ e $r = 1$ e disegnare $B_1(\vec{0}; 1)$ e $B_\infty(\vec{0}; 1)$.

Def. 1) Due distanze d e d' su X sono equivalenti se inducono la stessa topologia (cioè gli aperti sono gli stessi nelle topologie indotte dalle due distanze).

2) Uno spazio topologico (X, τ) è metrizzabile se esiste una distanza d

su X che induce la topologia τ.

<u>Oss.</u> 1) Siano d e d' due distanze su X. Indichiamo con $B(x;r)$ e $B'(x;r)$, $x\in X$, $r>0$, gli intorni sferici rispettivi. Allora:

d e d' sono equivalenti se e solo se

per ogni $x\in X$, $B(x;r)$ contiene un intorno sferico $B'(x,r')$, per un certo $r'>0$, e viceversa.

Conseguenza: su $\mathbb{R}^n$, la distanza euclidea d e le distanze d_1 e d_∞ sono equivalenti.

2) Si prova che "quasi" tutti gli spazi topologici sono metrizzabili.

<u>Prodotto di spazi topologici</u>

Siano P e Q due spazi topologici e sia $P\times Q=\{(x,y)\,/\,x\in P,\ y\in Q\}$ il loro prodotto cartesiano. Consideriamo le due proiezioni su ciascuno dei due fattori:

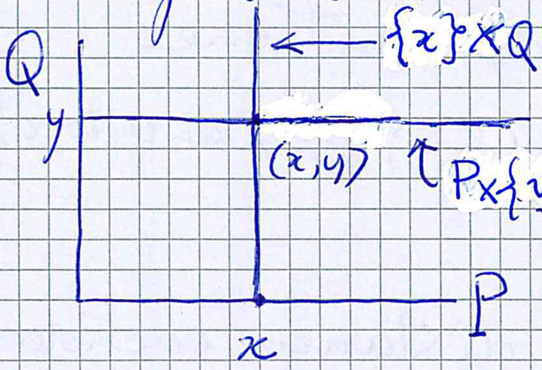
$$p: P\times Q \longrightarrow P, \quad (x,y)\longmapsto p(x,y)=x \qquad , \qquad q: P\times Q\longrightarrow Q, \quad (x,y)\longmapsto q(x,y)=y.$$

<u>Def.</u> La <u>topologia prodotto</u> su $P\times Q$ è la topologia <u>meno fine</u> che rende continue

le due proiezioni p e q.

<u>Teorema</u> 1) I sottoinsiemi del tipo $U \times V$, con U aperto di P e V aperto di Q, sono una base della topologia prodotto (detta <u>base canonica</u>).

2) Le proiezioni p e q sono funzioni aperte. Per ogni $(x,y) \in P \times Q$, le loro



restrizioni

$p : P \times \{y\} \longrightarrow P$

$q : \{x\} \times Q \longrightarrow Q$

sono omeomorfismi.

3) Sia X uno sp. topologico.

Una funzione $f : X \longrightarrow P \times Q$

$x \longmapsto f(x) = (\underset{\in P}{f_1(x)}, \underset{\in Q}{f_2(x)})$

è continua se e solo se le sue componenti

$$f_1 = p \circ f \quad , \quad f_2 = q \circ f$$

sono continue.

<u>Dim.</u> 1) Verifichiamo che $\mathcal{B} = \{U \times V, \begin{smallmatrix} U \text{ aperto di } P \\ V \text{ aperto di } Q \end{smallmatrix}\}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $P \times Q$.

a) $P \times Q = \bigcup\limits_{\substack{U \text{ aperto di } P \\ V \text{ aperto di } Q}} (U \times V)$ (ovvio!)

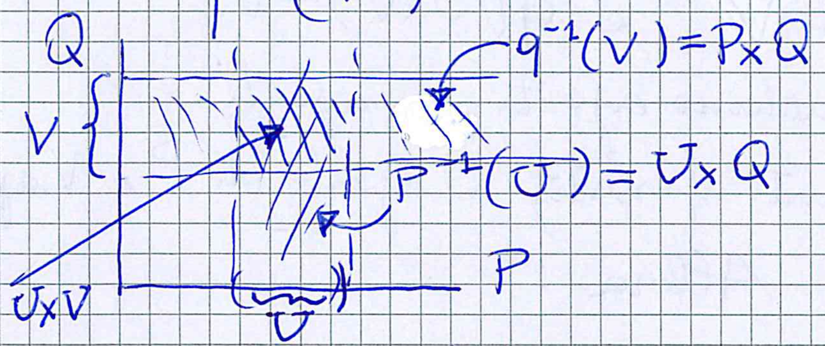
b) Se $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$ allora:

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\text{aperto di } P} \times \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\text{aperto di } Q}$$

(perché? Provarlo)

e quindi $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \in \mathcal{B}$. Pertanto:
sono verificate le condizioni (vedi teorema precedente) affinché $\mathcal{B}$ sia una base.
Inoltre le proiezioni p e q sono continue (nella topologia τ) dato che:

- se U è un aperto di P, allora
$$p^{-1}(U) = U \times Q \text{ è un aperto nella topologia } \tau$$
- se V è un aperto di Q, allora
$$q^{-1}(V) = P \times V \text{ è un aperto di } \tau$$



Sia $\mathcal{P}$ la topologia prodotto su $P \times Q$.
Per definizione:
$$\tau \text{ è } \underline{\text{più fine}} \text{ di } \mathcal{P}.$$
Verifichiamo che τ è anche <u>meno fine</u> di $\mathcal{P}$ e quindi le due topologie coincidono.
Ovviamente, se U è un aperto di P e V è un aperto di Q, allora:
$$U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$
Dato che $p^{-1}(U)$ e $q^{-1}(V)$ sono aperti nella topologia prodotto $\mathcal{P}$, anche $U \times V$ è aperto nella topologia prodotto. Ogni aperto di τ

è unione di aperti del tipo $U \times V$ e quindi è anche aperto nella topologia prodotto.

Quindi:

$\mathcal{T}$ è <u>meno fine</u> di $\mathcal{P}$.

e, pertanto, $\mathcal{T}$ coincide con $\mathcal{P}$.

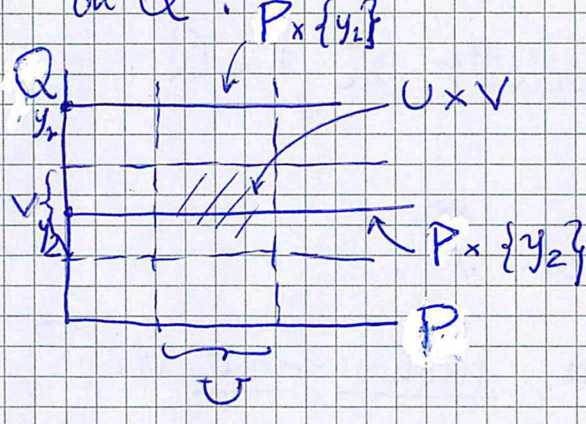
2) Per verificare che le proiezioni sono aperte, basta considerare gli aperti della base $\mathcal{B}$.

Se $U \times V \in \mathcal{B}$, U è un aperto di P e V è un aperto di Q e

$$p(U \times V) = U \quad e \quad q(U \times V) = V$$

Quindi p e q mandano aperti in aperti.

Siano $y \in Q$ un punto fissato, U aperto di P e V aperto di Q. Allora:



$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} U \times \{y\} & se\ y \in V \\ \emptyset & se\ y \notin V \end{cases}$$

Ciò significa che gli aperti del sottospazio topologico $P \times \{y\}$ sono tutti e soli del tipo

$U \times \{y\}$, al variare di U tra gli aperti di P.

Quindi, c'è una corrispondenza biunivoca tra gli aperti di $P \times \{y\}$ e gli aperti di P e quindi la proiezione p è un omeomorfismo.

Vale un ragionamento analogo per l'altra proiezione q.

3) Abbiamo visto che $f: X \longrightarrow P \times Q$ è continua se e solo se le controimmagini di aperti di una base di $P \times Q$ sono aperte in X.

Sia $U \times V$ un aperto della base canonica di $P \times Q$.

Dato che
$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \text{ (perché?)}$$

f è continua se e solo se f_1 e f_2 sono continue. (Ricordare che: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x \in X$).

La nozione di topologia prodotto si può estendere al prodotto cartesiano di un numero <u>finito</u> di spazi topologici $P_1, \ldots, P_n$.

La base canonica della topologia prodotto su $P_1 \times \ldots \times P_n$ è formata dai sottoinsiemi del tipo $U_1 \times \ldots \times U_n$, con U_i aperto di P_i, $i = 1, \ldots, n$.

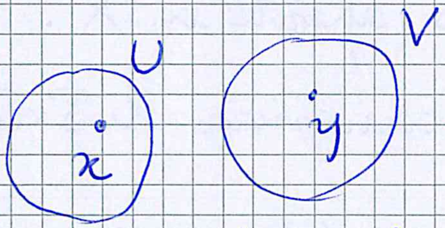
<u>Es.</u> 1) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-volte}}$ è il prodotto topologico di n copie di $\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea

2) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

Chi sono: $S^1 \times S^1$, $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\text{-volte}}$ con la topologia prodotto

Spazi di Hausdorff

Def. Uno spazio topologico X è di Hausdorff o T2 se dati due punti distinti $x, y \in X$ e $x \neq y$ allora esistono due intorni U di x e V di y tali che:



$$U \cap V = \emptyset$$

Si dice che le coppie di punti in uno spazio di Hausdorff sono "separate" e la condizione T2 si dice "assioma di separazione".

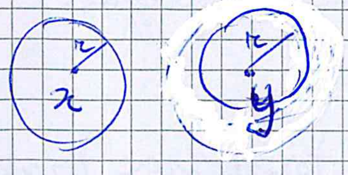
Esempi 1) Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff. Per esempio: (X, τ), dove X ha almeno due pt. distinti e τ è la topologia banale, NON è di Hausdorff.

Invece: $(X = \{P\}, \tau$: topologia banale$)$ e $(X = \emptyset, \tau$ banale$)$ sono di Hausdorff.

Proprietà Ogni spazio metrico è di Hausdorff.

Dim. Siano x e y due pt. distinti di (X, d). Allora: $d(x,y) > 0$. Sia $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$$



Proviamo che

$$B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset.$$

Supponiamo, per assurdo, che

$z \in B(x;r) \cap B(y;r)$, cioè

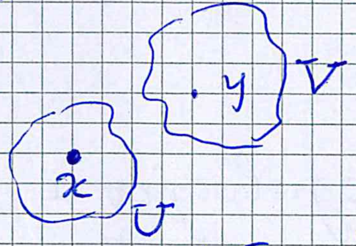
$d(x,z) < r$ e $d(y,z) < r$.

Allora

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 2r < d(x,y),$$ assurdo!

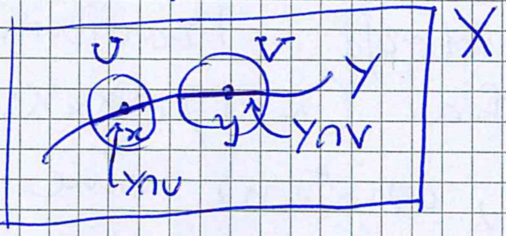
<u>Proprietà</u> In uno spazio di Hausdorff i sottoinsiemi <u>finiti</u> (in particolare i punti) sono chiusi.

<u>Dim.</u> Basta provare che, se $x \in X$, allora $\{x\}$ è chiuso. Proviamo che $X \setminus \{x\}$ è aperto. Se $y \in X \setminus \{x\}$, allora $x \neq y$ e quindi esistono due intorni $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ tali che: $U \cap V = \emptyset$. Quindi: $V \subseteq X \setminus \{x\}$, ossia $X \setminus \{x\}$ è intorno di ogni suo pt. e pertanto aperto.



<u>Proprietà</u> I sottospazi e i prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

<u>Dim.</u> Siano X uno sp. di Hausdorff e $Y \subseteq X$ un sottospazio. Siano $x, y \in Y$ due pt. distinti. Esistono due intorni <u>aperti</u> (in X) $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \in \mathcal{I}(x)$ disgiunti. Quindi anche $Y \cap U$ e $Y \cap V$ sono disgiunti. Questi sono aperti



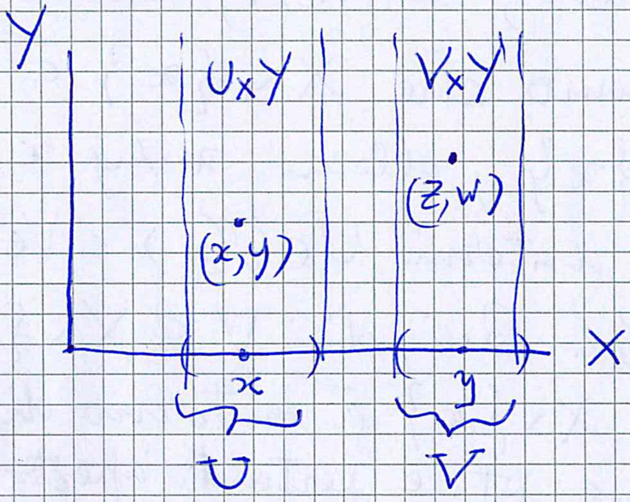
in Y e quindi i pt. x e y sono separati in Y.

Siano X e Y spazi di Hausdorff e siano $(x,y) \in X \times Y$ e $(z,w) \in X \times Y$ punti distinti.

Supponiamo che $x \neq z$, $x, z \in X$: esistono due aperti <u>disgiunti</u> U e V di X tali che: $x \in U$, $z \in V$.

Quindi
$$(x,y) \in \underbrace{U \times Y}_{\text{aperto di } X \times Y}, \quad (z,w) \in \underbrace{V \times Y}_{\text{aperto di } X \times Y}.$$

Inoltre:
$$(U \times Y) \cap (V \times Y) = \emptyset \quad (\text{perché?}).$$



Per verificare che uno spazio topologico è di Hausdorff si usa spesso la seguente condizione equivalente.

<u>Teorema</u> Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se <u>la diagonale</u>
$$\Delta \overset{\text{def.}}{=} \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$
è un sottoinsieme chiuso in $X \times Y$.

<u>Dim.</u> Sia X sp. di Hausdorff. Proviamo che $X \times X \setminus \Delta$ è aperto. Sia $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$. Quindi $x \neq y$. Per ipotesi, esistono due

aperti U e V di X tali che

$$x \in U, \; y \in V \text{ e } U \cap V = \emptyset.$$

Ciò implica che $U \times V \notin \Delta$, ossia

$$(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$$

Dato che $U \times V$ è un aperto di $X \times X$, $U \times V$ è un intorno di (x, y) e quindi

$X \times X - \Delta$ è aperto e Δ è chiusa.

Viceversa, sia Δ chiusa in $X \times X$.

Dati due punti distinti $x, y \in X$, $x \neq y$, si ha che $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$, insieme aperto per ipotesi. Quindi esisterà un intorno di (x, y) del tipo $U \times V$, con U e V aperti di X, tale che:

$$(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$$

e quindi: $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$, ossia X è di Hausdorff.

Conseguenza importante: date due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ il luogo in cui f e g coincidono è <u>chiuso</u> in X <u>se Y è di Hausdorff</u>.

<u>Corollario</u>: Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ due funzioni continue e sia Y uno spazio di Hausdorff. Allora, l'insieme

$$C \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in X \,/\, f(x) = g(x)\}$$

é chiuso in X.

Dim. Consideriamo la funzione
$$(f,g): X \longrightarrow Y\times Y$$
$$x \longmapsto (f(x), g(x)).$$

Poiché:

a) $Y\times Y$ é di Hausdorff (teorema precedente);

b) (f,g) é continua (esercizio! Iniziare col provare che:
$$(f,g)^{-1}(U\times V) = f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V),$$
dove U e V sono sottoinsiemi (aperti) di Y);

si ha che:
$$C = (f,g)^{-1}(\Delta)$$
e quindi C é chiuso in X dato che Y é di Hausdorff.

Altra conseguenza importante:

Corollario Se $f: X \to X$ é continua e X é di Hausdorff, l'insieme dei punti fissi di f:
$$\{x\in X \,/\, f(x) = x\}$$
é chiuso in X.

Dim. Basta applicare il corollario precedente, dove la funzione $g: X \to X$ é la funzione identitá.

Sia X uno sp. topologico.

<u>Def.</u> Un <u>sottoinsieme</u> $B \subseteq X$ è <u>denso in X</u> se $\overline{B} = X$, ossia la sua chiusura coincide con X.

<u>Oss.</u> 1) B è denso in X se e solo se (B interseca) <u>ogni</u> insieme <u>aperto</u> (non vuoto) di X.

2) a) (X, top. banale):
Ogni sottoinsieme (<u>non vuoto</u>) è denso in X (perché coincide con X)

b) (X, top. discreta)
Nessun sottoinsieme <u>proprio</u> è denso in X

3) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, con la topologia Euclidea. Ciò implica che:
dato un numero reale qualsiasi r, ogni intorno di r (per quanto piccolo) contiene dei numeri razionali.

<u>Corollario</u> Siano $f: X \to Y$ e $g: X \to Y$ due funzioni continue e sia Y di Hausdorff. Se f e g coincidono su un insieme denso di X allora f e g coincidono ovunque, cioè $f = g$.

<u>Dim.</u> Sia $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
Sappiamo che
$$C = \overline{C} = X$$
$C = \overline{C}$ perché C è chiuso in X; $\overline{C} = X$ perché C è denso in X

Infine, abbiamo che

Corollario Sia $f: X \to Y$ continua, e sia Y di Hausdorff. Il grafico di f:

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \in X \times Y \,/\, y = f(x),\ x \in X \}$$

è chiuso in $X \times Y$.

Dim. esercizio!

Spazi topologici connessi

Def. Uno spazio topologico X è connesso se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X. Se X non è connesso si dice sconnesso.

Teorema Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1) X è sconnesso
2) X è unione disgiunta di due aperti propri
3) X è unione disgiunta di due chiusi propri.

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) + 3)

Per ipotesi, deve esistere un sottoinsieme A di X, non vuoto, diverso da X, che è sia aperto che chiuso. Di conseguenza, anche il complementare $B = X \setminus A$ è: non vuoto, diverso da X, aperto e chiuso in X.

Quindi $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, A, B aperti e chiusi in X.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $X = A_1 \cup A_2$, dove A_1 e A_2 sono due aperti propri di X tali che:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Quindi: $A_1 = X \setminus A_2$ è sia aperto che chiuso. Dato che A_1 è proprio, X è sconnesso.

3) $\Rightarrow$ 1) Se $X = C_1 \cup C_2$, con C_1, C_2 chiusi propri tali che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, allora $C_1 = X \setminus C_2$ è proprio, aperto e chiuso.

<u>Esempi</u> 1) $X = \emptyset$: connesso

2) $(X = \{x\}, \tau$ banale$)$: connesso

3) X con almeno <u>due</u> elementi

$(X, \tau_1$: topologia discreta$)$: sconnesso

$(X, \tau_2$: topologia banale$)$: connesso

4) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}$, euclidea$)$

Dato che

$$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0) = X \cap (-\infty, 0)$$
$$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty) = X \cap (0, +\infty)$$

sono aperti disgiunti nella topologia del sottospazio e

$$X = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$$

allora X è sconnesso.

<u>Attenzione</u>: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso!
(Perché?)

Quindi:
X è <u>connesso</u> se e solo se <u>non</u> è unione disgiunta di due aperti (o chiusi) propri.

<u>Def.</u> X sp. topologico
Un sottospazio topologico $Y \subseteq X$ è connesso se è connesso rispetto alla topologia indotta.

<u>Lemma</u> X sp. topologico.
Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme aperto <u>e</u> chiuso in X.
Se $Y \subseteq X$ è un sottosp. <u>connesso</u>, ci sono solo due possibilità:

$$Y \subseteq A \quad \text{oppure} \quad Y \cap A = \emptyset.$$

<u>Dim.</u> Per ipotesi, $Y \cap A$ è sia aperto che chiuso in Y. Dato che Y è connesso, ci sono solo due possibilità:

$$Y \cap A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad Y \cap A = Y \text{ e quindi } Y \subseteq A.$$

<u>Teorema</u> L'intervallo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ è connesso nella topologia Euclidea.

<u>Dim.</u>: Supponiamo che C e D siano due

chiusi non vuoti di $[0,1]$ tali che
$$C \cup D = [0,1].$$
Proviamo che $C \cap D \neq \emptyset$ e quindi $[0,1]$ <u>non</u> è sconnesso.

Supponiamo che $0 \in C$. Sia $d \in [0,1]$, l'estremo inferiore di D, cioè:
$$(*)\ d \leq d',\ \forall d' \in D$$
e se $d'' \leq d',\ \forall d' \in D$, allora: $d'' \leq d$. $(*,*)$

(d esiste perché C è limitato).

Proviamo che $d \in C \cap D$.

Dato che D è chiuso, si ha che $d \in D$. Infatti, se supponiamo, per assurdo, che $d \notin D$, deve esistere un intorno aperto di d che non contiene punti di D, ossia esiste un <u>$\varepsilon > 0$</u> tale che:
$$(d-\varepsilon, d+\varepsilon) \cap D = \emptyset.$$
Allora:
$$d < d+\varepsilon \leq d',\ \forall d' \in D, \text{ per}(*)$$
ossia, per definizione di estremo inferiore: (vedi$(*,*)$) $d+\varepsilon \leq d$, assurdo!

Ci sono due possibilità:

a) $d = 0$: in tal caso $d \in C \cap D \neq \emptyset$.

b) $d > 0$: consideriamo il sottoinsieme
$$E \overset{\text{def}}{=} C \cap [0,d].$$
Dato che (d è l'estr. inf. di D) $[0,d) \cap D = \emptyset$, ossia $[0,d) \subseteq C$ e quindi $[0,d) \subseteq E$. Come prima,

dato che E è chiuso si ha che $d \in E$ e quindi: $d \in C$, da cui $d \in C \cap D$.

Proviamo che ~~una~~ una funzione continua manda connessi in connessi.

<u>Teorema</u> Sia $f: X \to Y$ una funzione continua. Se X è connesso, anche $f(X)$ è connesso.

<u>Dim.</u> Sia $Z \subseteq f(X)$ un sottoinsieme <u>aperto</u> e <u>chiuso</u> <u>non vuoto</u> di $f(X)$. Proveremo che $f(X) = Z$ e quindi $f(X)$ è connesso per definizione.

Dato che $f(X)$ è un sottosp. topologico, esistono un aperto A di Y e un chiuso C di Y tali che

$$Z = f(X) \cap A = f(X) \cap C.$$

Dato che f è continua:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Z) \text{ è un } \underline{\text{aperto}} \text{ di } X$$

e

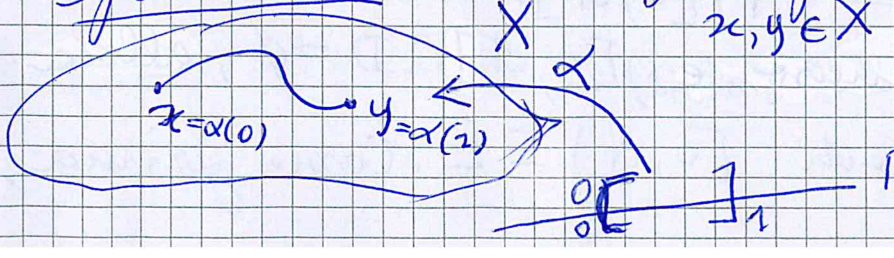
$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Z) \text{ è un } \underline{\text{chiuso}} \text{ di } X.$$

Dato che $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$ e X è connesso, si deve avere che:

$$X = f^{-1}(Z), \text{ ossia: } f(X) = Z.$$

Vediamo ora un tipo di connessione "più forte" del precedente.

<u>Def.</u> Uno spazio topologico X è <u>connesso per archi</u> se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una funzione continua



$\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tale che

$$\alpha(0) = x \quad e \quad \alpha(1) = y$$ (o un arco)

Si dice che: α è un cammino da x ad y.

Oss. L'immagine continua di uno spazio connesso per archi è connessa per archi.

Teorema Ogni spazio connesso per archi è connesso.

Dim. Sia X connesso per archi.

Supponiamo che esistano due aperti non vuoti A e B di X tali che

$$A \cup B = X.$$

Proviamo che A e B non sono disgiunti, cioè

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Siano $x \in A$, $y \in B$. Per ipotesi, esiste una funzione continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Gli aperti di $[0,1]$: $\alpha^{-1}(A)$ e $\alpha^{-1}(B)$ non sono vuoti (perché $0 \in \alpha^{-1}(A)$ e $1 \in \alpha^{-1}(B)$).

Inoltre:

$$\alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B) = [0,1]$$

Dato che $[0,1]$ è connesso:

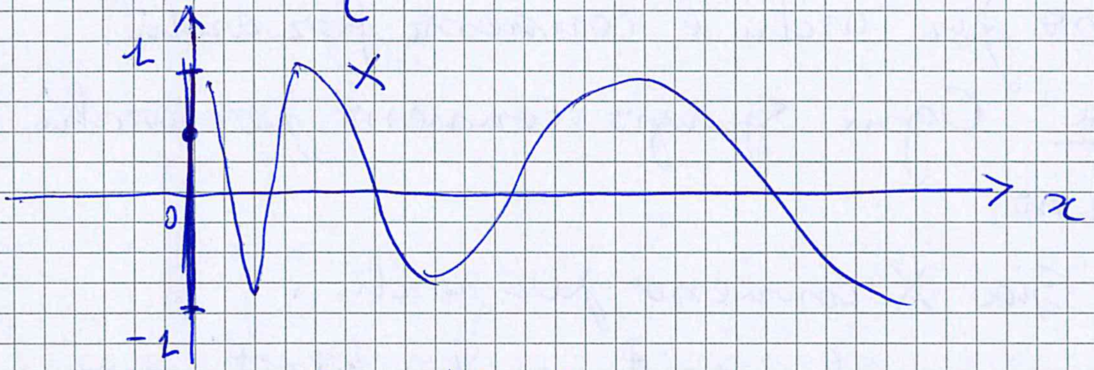
$$\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \neq \emptyset$$

e quindi esiste un $t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)$, ossia

$$\alpha(t) \in A \cap B \neq \emptyset.$$

<u>Attenzione</u>: ci sono insiemi connessi ma <u>non</u> connessi per archi

Sia $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0, \ -1\leq y\leq 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x>0\}$

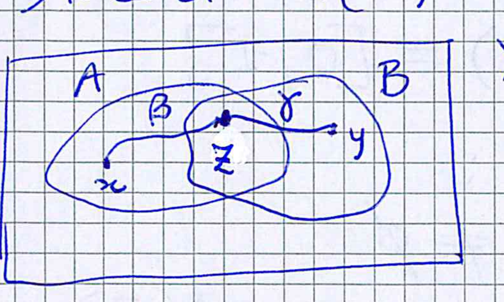


"Curva del topologo"

Si prova che X è connesso ma non è connesso per archi: un pt. dell'intervallo $[-1,1]$ sull'asse y NON può essere connesso per archi a nessun punto del grafico di $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

<u>Teorema</u> Siano A e B sottosp. topologici di X <u>connessi</u> <u>per archi</u>. Se $A\cap B\neq\emptyset$, allora $A\cup B$ è connesso per archi.

<u>Dim.</u> E' sufficiente provare che se $x\in A$ e $y\in B$, allora esiste un arco $\alpha:[0,1]\to A\cup B$ tale che $\alpha(0)=x$ e $\alpha(1)=y$.



Sia $z\in A\cap B$; per ipotesi, esistono due archi $\beta:[0,1]\to A$, $\gamma:[0,1]\to B$ tali che: $\beta(0)=x$, $\beta(1)=z$, $\gamma(0)=z$, $\gamma(1)=y$.

Definiamo l'arco α (che si indica anche con $\beta*\gamma$) che congiunge x con y:

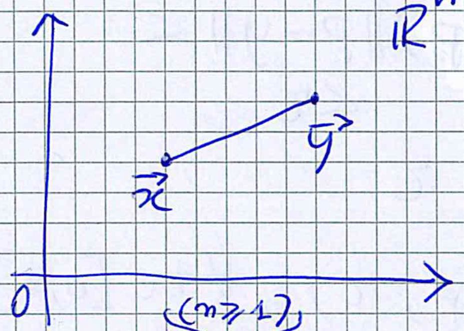
$$\alpha(t) = (\beta * \gamma)(t) \overset{def.}{=} \begin{cases} \beta(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Conseguenze:

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi (e quindi anche connesso): se $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\alpha(t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$

$t \in [0,1]$ è un segmento che unisce $\vec{x}$ con $\vec{y}$.



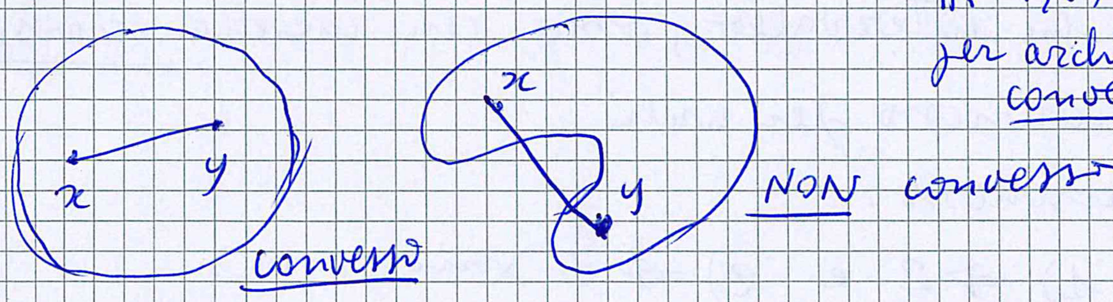
2) S^n $(n \geq 1)$ è connesso per archi perché S^n è l'unione di due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$: sono le immagini di S^n mediante le proiezioni stereografiche dai due poli.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se, per ogni ~~coppia~~ coppia di punti, $\vec{x}, \vec{y} \in A$ il segmento

$$\alpha(t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}, \quad t \in [0,1]$$

è tutto contenuto in A.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: connesso per archi ma non convesso



Esempio: Se $p \in \mathbb{R}$, $r > 0$, l'intorno sferico di centro p e raggio r:

$$B(p;r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \,/\, \|\vec{x}-p\|<r\}$$

è convesso.

Dim. Se $\vec{x},\vec{y}\in B(p;r)$ e $t\in[0,1]$, si ha

$$\|p-[t\vec{x}+(1-t)\vec{y}]\| = \|t(p-\vec{x})+$$
$$+(1-t)(p-\vec{y})\| \leq \|t(p-\vec{x})\|+\|(1-t)(p-\vec{y})\|$$
$$= t\underbrace{\|p-\vec{x}\|}_{<r}+(1-t)\underbrace{\|p-y\|}_{<r}<$$
$$< tr+(1-t)r = r$$

ossia: $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\in B(p;r)$, $\forall t\in[0,1]$.

Teorema Ogni sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi e quindi è connesso.

Dim. Ovvia.

Vediamo che per gli intervalli della retta reale, essere connesso ed essere connesso per archi sono condizioni equivalenti.

Teorema Sia I un sottoinsieme $\mathbb{R}$.

Sono equivalenti:

1) I è un intervallo, ossia un insieme convesso.

2) I è connesso per archi.

3) I è connesso.

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2 e 2) $\Rightarrow$ 3 sono ovvie.

3) $\Rightarrow$ 1) Dobbiamo provare che ogni sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme connesso.
Supponiamo, per assurdo, che I non sia un intervallo. Ciò implica, che esistono tre punti
$$a < b < c$$
con $a, c \in I$ e $b \notin I$.
Allora i due aperti di I:
$$A = I \cap (-\infty, b), \quad B = I \cap (b, +\infty)$$
sono:
- disgiunti
- $A \cup B = I$
- non vuoti ($a \in A$, $c \in B$).

Quindi: I sarebbe sconnesso (assurdo!).

Conseguenze importanti:

Teorema Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ($\mathbb{R}$ con la topologia Euclidea)

1) Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, allora la sua immagine $f(I)$ è ancora un intervallo.
2) (esistenza degli zeri) Se per $a < b$, si ha $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, (oppure $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:
$$f(c) = 0.$$
(Basta notare che $f([a,b])$ è un intervallo che deve contenere lo zero).

3) (teorema dei valori intermedi)

Se $f(a) < f(b)$, allora per ogni y tale che: $f(a) < y < f(b)$, esiste $x \in [a,b]$, tale che:

$$f(x) = y.$$

(Notare che: $[f(a), f(b)] \subseteq f(\mathbb{R})$)

Teorema Sia $f: S^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, una funzione continua. Allora, esiste un $x \in S^n$, tale che $f(x) = f(-x)$ (f ha lo stesso valore su due pt. antipodali) e quindi f non é iniettiva.

Dim. Ricordiamo che:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| < 1\}$$ é

un sottoinsieme connesso. Quindi $f(S^n)$ é un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ e quindi anche convesso (Teorema precedenti).

Consideriamo la funzione

$$g: S^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) - f(-x)$$

Anche g é continua e $g(S^n)$ é un intervallo e quindi convesso.

Sia $y \in S^n$ un pt. qualsiasi. Allora $g(S^n)$ contiene i punti $g(y)$ e

$g(-y) = -g(y)$ e, quindi (essendo $g(S^n)$ convesso) contiene ogni punto tra i due.

In particolare, $g(S^n)$ contiene il

punto:

$$\frac{1}{2}g(y)+\frac{1}{2}g(-y)=\frac{1}{2}g(y)-\frac{1}{2}g(y)=0,$$

ossia $0 \in g(S^n)$. Quindi, esiste un $x \in S^n$, tale che:

$$g(x)=f(x)-f(-x)=0.$$

Conseguenze:

1) Sia S^n il globo terrestre e sia $T: S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione che associa ad ogni punto della terra la sua temperatura.
T è ovviamente continua; il teorema precedente dice che, in questo momento, ci sono due punti, uno agli antipodi dell'altro, che hanno esattamente la stessa temperatura (non sappiamo quali!).

Vale la stessa cosa per la funzione pressione, umidità dell'aria e per ogni altro parametro atmosferico.

2) Un aperto di $\mathbb{R}$ NON è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $\boxed{n>1}$.
Infatti: se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto e $n>1$, A contiene un intorno sferico e quindi anche un sottoinsieme omeomorfo a S^{n-1} (bordo dell'intorno sferico).
Un eventuale omeomorfismo tra A e un aperto di $\mathbb{R}$, indurrebe, per restrizione,

una funzione continua $f: S^n \to f(S^n) \subseteq \mathbb{R}$
che, per il Teorema precedente, NON può essere iniettiva.
Questo fatto è un caso particolare del:
Teorema della dimensione $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$, U, V aperti, (con la topologia Euclidea) sono omeomorfi se e solo se $\boxed{n = m}$.

La dimostrazione non è semplice e si vedrà in corsi avanzati.

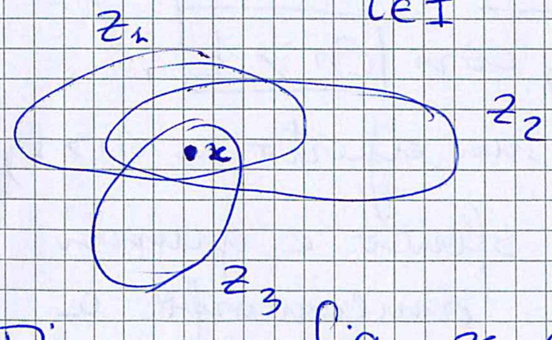
Proviamo che se l'intersezione di sottospazi connessi è non vuota, anche la loro unione è connessa.

Teorema Sia X uno spazio topologico e sia $\{Z_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi connessi $\boxed{\text{non}}$ disgiunti, ossia:

$$\bigcap_{i \in I} Z_i \neq \emptyset.$$

Allora, anche la loro unione:

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \text{ è connessa.}$$



Dim. Sia $x \in \bigcap_{i \in I} Z_i \neq \emptyset$.
Sia $A \subseteq W = \bigcup_{i \in I} Z_i$ un sottoinsieme aperto e

<u>chiuso</u>, <u>non</u> <u>vuoto</u>, di W.

Proveremo che $W \subseteq A$ e quindi $A = W$, e, pertanto, W è connesso.

Consideriamo gli insiemi, $Z_i \cap A$, $i \in I$.

Essi, sono sia aperti che chiusi in Z_i; dato che ogni Z_i è connesso per ipotesi, ci sono due possibilità:

$$Z_i \cap A = \emptyset \quad \text{oppure} \quad Z_i \cap A = Z_i$$

(per definizione di connessi).

Dato che A non è vuoto, non è possibile che $Z_i \cap A = \emptyset$, per <u>ogni</u> $i \in I$. Quindi, deve esistere un $i_0 \in I$, tale che

$$Z_{i_0} \cap A = Z_{i_0}$$

ossia:

$$Z_{i_0} \subseteq A.$$

Se $x \in \bigcap_{i \in I} Z_i$, allora $x \in Z_{i_0} \subseteq A$ e quindi $x \in A$. Ciò implica che:

$$x \in Z_i \cap A \neq \emptyset, \text{ per } \underline{\text{ogni}} \ i \in I,$$

$$Z_i \cap A = Z_i \ \text{ e } \ Z_i \subseteq A, \text{ per } \underline{\text{ogni}} \ i \in I.$$

In conclusione:

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A$$

e, quindi, $A = W$.

Conseguenza:

Teorema: Il $\overbrace{\text{prodotto cartesiano}}^{X\times Y}$ di due $\overbrace{\text{spazi topologici}}^{X \text{ e } Y}$ è connesso se e solo se X e Y sono connessi.

Dim. Ip.: $X\times Y$ connesso
Tesi: X e Y connessi

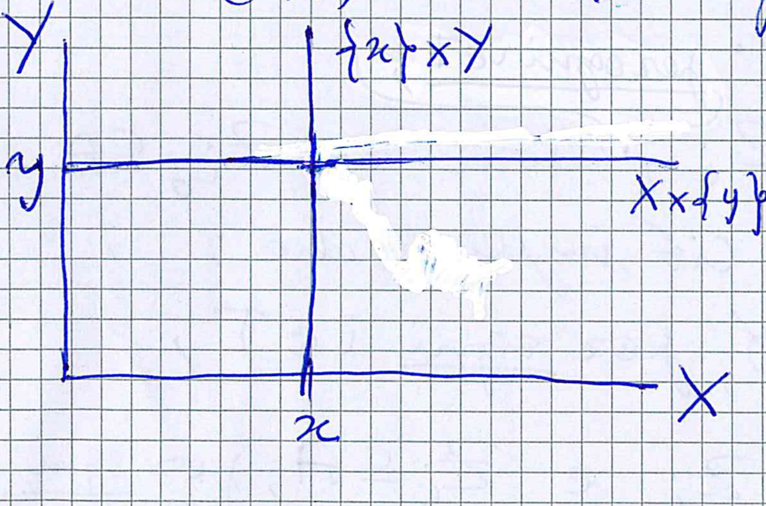
Se $X\times Y$ è connesso, dato che le proiezioni $p: X\times Y \to X$ e $q: X\times Y \to Y$ sono continue, anche le loro immagini

$$X = p(X\times Y) \quad \text{e} \quad Y = q(X\times Y)$$

sono connesse.

Ip.: X, Y connessi
Tesi: $X\times Y$ connesso

Sia $(x,y)\in X\times Y$. Sappiamo che:



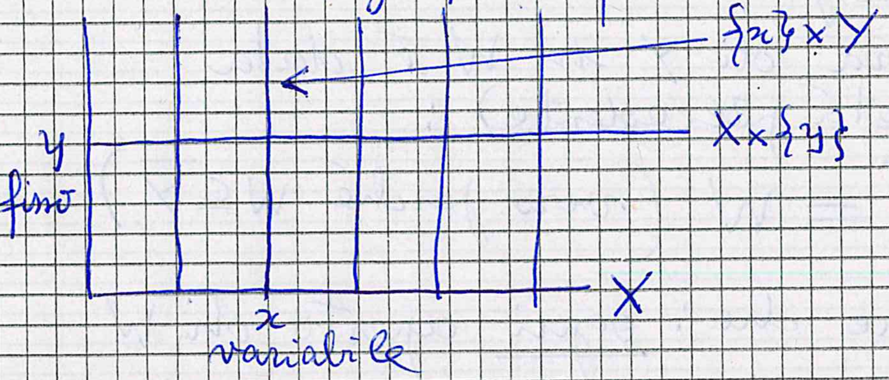
$X\times\{y\}$ è omeomorfo a X
$\{x\}\times Y$ è omeomorfo a Y

Quindi, dato che X e Y sono connessi, anche $X\times\{y\}$ e $\{x\}\times Y$ sono connessi.

Dato che:
$$(X\times\{y\})\cap(\{x\}\times Y) = \{(x,y)\} \neq \emptyset,$$
per il teorema precedente, anche
$$Z_{x,y} \overset{\text{def.}}{=} (X\times\{y\}) \cup (\{x\}\times Y)$$

é connesso.

Fissiamo $y \in Y$ e facciamo variare $x \in X$.



Notare che:

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} Z_{x,y}.$$

Dato che

$$\bigcap_{x \in X} Z_{x,y} = X \times \{y\} \neq \emptyset,$$

si ha che $X \times Y$ é connesso (teorema precedente).

Teorema Sia Y un sottospazio connesso di X e sia W un sottoinsieme compreso fra Y e la sua chiusura in X:

$$Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}.$$

Allora: W é connesso.

Conseguenza: la chiusura di un sottosp. topologico connesso é connessa.

Dim. Sia $A \subseteq W$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in W.

Quindi: $Y \cap A$ é aperto e chiuso in Y.

Proveremo che $A = W$: per questo é sufficiente provare che $W \subseteq A$.

Si ha:

- Y è denso in W, perché:
  la chiusura di Y in W è data da (proprietà precedente):

chiusura di Y in X

$$W \cap \overline{Y} = W \quad (\text{vero perché } W \subseteq \overline{Y})$$

- Da ciò segue che: ogni aperto di W contiene punti di Y. In particolare,

$$Y \cap A \neq \emptyset.$$

Per ipotesi, Y è connesso. Inoltre:

$Y \cap A$ è un aperto e chiuso, non vuoto, di Y. Quindi, necessariamente:

$$Y \cap A = Y$$

ossia: $Y \subseteq A$.

Quindi:

$$W = \text{Chiusura di } Y \text{ in } W \subseteq \text{Chiusura di } A \text{ in } W =$$

Y denso in W

perché $Y \subseteq A$

$$= A$$

perché A è chiuso in W

In conclusione: $W \subseteq A$.

Componenti connesse

Def. X sp. topologico.

Un sottospazio $C \subseteq X$ è una componente connessa di X se:

1) C è connesso.
2) Se $C \subseteq A$ ed A è connesso, allora $C = A$.

Ciò significa che C è massimale rispetto alla proprietà di essere connesso.

Esempio: X sp. topologico.

Sia $C \subseteq X$ un sottospazio: aperto, chiuso, connesso, non vuoto

Allora: C è una componente connessa di X (esercizio!)

Proprietà X sp. topologico

Sia $x \in X$ un punto fissato. Consideriamo l'insieme $C(x) \overset{\text{def.}}{=} \bigcup \{ Y \mid x \in Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ connesso} \}$

(cioè: $C(x)$ è l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi che contengono x)

Allora: $C(x)$ è una componente connessa di X.

Dim. Dato che l'insieme $\{x\}$ è connesso, allora $\{x\} \subseteq C(x)$ e quindi $x \in C(x)$.

Consideriamo la famiglia di tutti i sottospazi connessi di X che contengono x.

L'intersezione di tali sottospazi non è vuota (contiene il punto x) e quindi (teorema precedente) la loro <u>unione</u>, cioè $C(x)$, è connessa.

Sia $A \subseteq X$ un sottospazio <u>connesso</u> che $\boxed{\text{contiene}}$ $C(x)$.

Ovviamente, $x \in A$ poi A è connesso.

Per definizione di $C(x)$, si ha:

$$A \subseteq C(x)$$

Ossia:

$$C(x) = A.$$

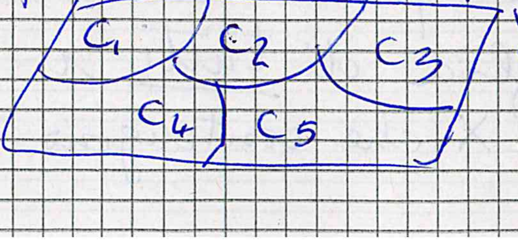
<u>Def.</u>: $C(x)$ si dice <u>componente connessa di x</u> in X.

Quindi: $C(x)$ è il <u>più grande</u> sottoinsieme <u>connesso</u> di X che contiene il punto x.

<u>Teorema</u> Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse.

Inoltre: ogni componente connessa è chiusa e un punto di x sta in una ed una sola componente connessa.

Si dice che: le componenti connesse formano una <u>partizione</u> di X:



- $X = \bigcup_{i \in I} C_i$, C_i comp. connessa
- $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Dim. Per la proprietà precedente, se $x \in X$, allora $x \in C(x)$, componente connessa di x in X.

Siano C_1, C_2 due componenti connesse.

Supponiamo che $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Proveremo che $C_1 = C_2$.

Sappiamo che: $C_1 \cup C_2$ è connesso

Dato che C_1 è una componente connessa e, ovviamente,

$$C_1 \subseteq C_1 \cup C_2 \text{ connesso}$$

allora

$$C_1 = C_1 \cup C_2$$

per definizione di componente connessa.

Analogamente: $C_2 \subseteq C_1 \cup C_2$ implica che

$$C_2 = C_1 \cup C_2$$

ossia: $C_1 = C_2$.

Infine, sia C una componente connessa. Abbiamo visto che anche la sua chiusura $\overline{C}$ è connessa e $\overline{C} \supseteq C$.

Allora: $C = \overline{C}$ è chiusa.

Applicazione: provare che

$$X = \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } Y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

non sono omeomorfi.

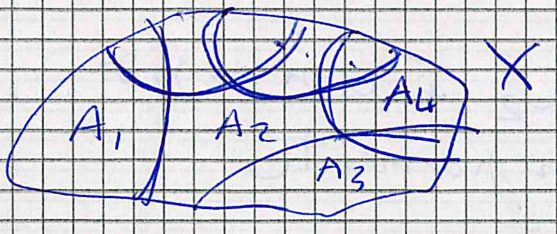
(X ha due comp. connese; Y ha tre comp. connese

Spazi topologici compatti

Def. Sia X uno sp. topologico.

1) Un ricoprimento di X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X tali che:

$$X = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$$



2) Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di X si dice aperto (o chiuso) se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto (o chiuso) in X.

3) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due ricoprimenti di X, si dice che $\mathcal{A}$ è un sottoricoprimento se

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

ossia: se $A \in \mathcal{A}$ allora $A \in \mathcal{B}$.

Esempi 1) Le componenti connesse di X formano un ricoprimento chiuso di X.

2) $\mathcal{A} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$

3) $\mathcal{A} = \{B(x; 1), x \in \mathbb{R}^n\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$.

Def. 1) Uno spazio topologico X è **compatto** se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento **finito**.

2) Un sottospazio topologico di X è compatto se è compatto nella topologia indotta.

Ciò significa che:

un sottosp. Y di X è compatto se per ogni famiglia di aperti $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup \{ A \mid A \in \mathcal{O}\!\mathcal{L} \}$$

allora esistono $A_1, \ldots, A_n$ elementi di $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ tali che

$$Y \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{e quindi}$$

$$Y = \underbrace{(Y \cap A_1)}_{\text{aperto di } Y} \cup \ldots \cup \underbrace{(Y \cap A_n)}_{\text{aperto di } Y}.$$

Esempi 1) Ogni insieme **finito** è compatto (con qualsiasi topologia).

2) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, NON è compatto.

Supponiamo, per assurdo, che $\mathbb{R}^n$ sia compatto. Consideriamo il ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{O}\!\mathcal{L} = \{ B(0; m),\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \}.$$

Se $\mathbb{R}^n$ fosse compatto, allora potrebbe essere ricoperto da un numero finito di intorni del tipo precedente, cioè esistono k numeri naturali $m_1, \ldots, m_k$ tali che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} B(0; m_i).$$

Sia $m_0 = \max(m_1, \dots, m_k)$; allora
$$\mathbb{R}^n = B(0; m_0),$$ assurdo!

3) Sia: $(X$, top. banale$)$: compatto
$(X$, top. discreta$)$: X è compatto se e solo se X è finito.

Teorema: Sia $f: X \to Y$ una funzione continua.
Se X è compatto, la sua immagine è compatta.
Quindi: se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo, allora X è compatto se e solo se Y è compatto. Si dice che: "la compattezza è una proprietà topologica".

Dim. Ricordiamo che $f(X)$ è un sottospazio topologico di Y.
Sia $\mathcal{O}\!\iota$ una famiglia di aperti di Y che ricopre $f(X)$, cioè:
$$f(X) \subseteq \cup \{A \,/\, A \in \mathcal{O}\!\iota\}.$$
Allora la famiglia
$$\{f^{-1}(A) \,/\, A \in \mathcal{O}\!\iota\}$$
è un ricoprimento aperto di X.
Dato che X è compatto, esiste un sottoricoprimento aperto finito di X: cioè esistono $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{O}\!\iota$ aperti tali che

$$X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n).$$

Quindi:

$$f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$$

e

$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup \dots \cup (f(X) \cap A_n),$$

dove $f(X) \cap A_i$ è un aperto di $f(X)$.

<u>Teorema</u> $[0,1]$ è un sottospazio compatto di $\mathbb{R}$, con la topologia Euclidea.

<u>Dim.</u> Sia $\mathcal{O}$ una famiglia di <u>aperti</u> di $\mathbb{R}$ che ricopre $[0,1]$ e quindi:

$$[0,1] \subseteq \bigcup \{ A \,/\, A \in \mathcal{O} \}.$$

Consideriamo l'insieme:

$$X \overset{\text{def.}}{=} \{ t \in [0,1] \,/\, [0,t] \text{ è contenuto nell'unione di un numero } \underline{\text{finito}} \text{ di aperti di } \mathcal{O} \}$$

Notare che: $[0,0]$ sta in <u>un</u> aperto di $\mathcal{O}$ e quindi $0 \in X$. ~~ossia~~ $X \neq \emptyset$.

Sia b l'<u>estremo superiore</u> di X, cioè:

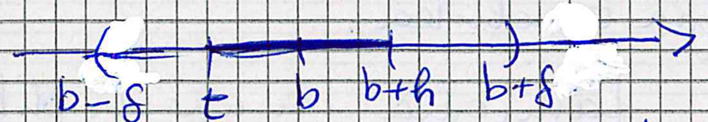
1) $t \leq b$, $\forall t \in X$
2) Se $t \leq b'$, $\forall t \in X$, allora $b \leq b'$.

Proviamo che $b = 1$.

Supponiamo, per assurdo, che $b < 1$.

Ovviamente: $b > 0$, dato che $0 \in X$, 0 sta in un aperto A di $\mathcal{O}$ e quindi esiste un $\delta > 0$ tale che $(-\delta, \delta) \subseteq A$ ossia: ogni $0 < t < \delta$ sta in X e quindi $b \geq t > 0$.

Quindi:
$$0 < b < 1.$$
Dato che $b \in [0,1] \subseteq \{A \,/\, A \in \mathcal{O}\}$, esiste un $A \in \mathcal{O}$ tale che $b \in A$.
Essendo A aperto in $\mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che:
$$(*) \quad (b-\delta, b+\delta) \subseteq A$$



Dato che $b - \delta < b$, per definizione di estremo superiore, deve esistere un $t \in X$ tale che
$$b - \delta < t < b$$
Ma $t \in X$, implica che esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{O}$ tali che: $[0,t] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$, $A_i \in \mathcal{O}$

Sia $0 \leq h < \delta$. Dato che $t < b+h$, si ha:
$$\begin{aligned}[0, b+h] &= [0,t] \cup [t, b+h] \subseteq \\ &\subseteq [0,t] \cup (b-\delta, b+\delta) \\ &\subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A \text{ (per } (*)\text{)}\end{aligned}$$
e quindi $b+h \in X$. Assurdo, perché b è l'estremo superiore di X!

Quindi: $b = 1$. Infine dobbiamo provare che $1 \in X$.
Dato che $1 \in [0,1]$, esiste un aperto A' di

$\mathcal{O}\!\iota$ tale che $1 \in A'$.
Poiché A' è aperto in $\mathbb{R}$, esiste un $\delta' > 0$ tale che
$$(1-\delta', 1+\delta') \subseteq A'$$
Dato che $1 - \delta' < 1 = \sup X$, esiste $t' \in X$, tale che:
$$1 - \delta' < t' \leq 1$$
Dire che $t' \in X$ significa che esiste un numero finito di aperti $A'_1, \ldots, A'_k$ di $\mathcal{O}\!\iota$ tali che
$$[0, t'] \subseteq A'_1 \cup \ldots \cup A'_k, \quad A'_i \in \mathcal{O}\!\iota$$
e quindi
$$[0,1] = [0,t'] \cup [t', 1] \subseteq$$
$$\subseteq A'_1 \cup \ldots \cup A'_k \cup A'.$$
Conseguenza: $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $[0,1]$ perché $\mathbb{R}$ non è compatto e $[0,1]$ è compatto.

Teorema 1) Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
2) L'unione finita di compatti è compatta.

Dim. 1) Sia X compatto e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio chiuso.
Proviamo che Y è compatto: sia $\mathcal{O}\!\iota$ una

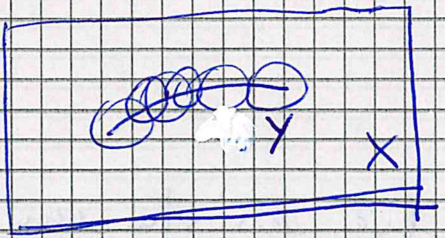
famiglia di aperti di X tali che

$$Y \subseteq \bigcup \{A \,/\, A \in \mathcal{O}\}$$

Ovviamente, la famiglia di aperti

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{X - Y\}$$

ricopre X.



Notare che, per ipotesi, $X - Y$ è aperto in X.

Dato che X è compatto, esiste una sottofamiglia finita di $\mathcal{O}'$ che ricopre X, cioè:

$$X = (X - Y) \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

Dato che $Y \subseteq X$ (e non può stare in $X - Y$) allora

$$Y \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

ossia Y è un sottospazio compatto.

2) Siano $K_1, \ldots, K_n$ sottospazi topologici di uno spazio topologico X.

Consideriamo il sottospazio

$$K \overset{\text{def.}}{=} K_1 \cup \ldots \cup K_n$$

e proviamo che è compatto.

Sia $\mathcal{O}$ una famiglia di aperti di X che ricopre K. Ovviamente, tale famiglia ricopre anche <u>ogni</u> sottospazio K_i, $1 \leq i \leq n$.

Dato che ciascun K_i è compatto, esiste una sottofamiglia $\mathcal{O}_i$ finita di $\mathcal{O}$ che ricopre ciascun K_i, per $i = 1, 2, \dots, n$.

L'unione $\mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_n$ di tali sottofamiglie è una sottofamiglia finita di $\mathcal{O}$ che ricopre K.

Conseguenze:

Corollario: Un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dim. Ricordiamo che la compattezza è una proprietà topologica: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo, allora X è compatto se e solo se Y è compatto.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme chiuso e limitato.

Limitato significa che: per qualche $a > 0$
$$A \subseteq [-a, a].$$

Dato che $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$, (ad esempio $f(t) = a(2t-1)$ è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[-a, a]$), allora $[-a, a]$ è compatto. Poiché A è un chiuso contenuto in un compatto, A è compatto per la 1) del Teorema precedente.

Viceversa, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto.

La famiglia di intervalli aperti $\{(-n, n) / n \in \mathbb{N}\}$

ricopre A e quindi esiste un sottoricoprimento finito tale che:

$$A \subseteq (-n_1, n_1) \cup \dots \cup (-n_k, n_k).$$

Sia $N = \max(n_1, \dots, n_k)$, allora:

$$A \subseteq (-N, N).$$

Ciò significa che A è limitato.

Proviamo che A è anche chiuso.

Sia $\boxed{p \notin A}$. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-p}$$

Dato che f è continua e A è compatto, allora $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e, quindi per quanto appena visto, $f(A)$ è limitato.

Dato che $\lim_{x \to p} \frac{1}{x-p} = \pm\infty$,

ciò implica che esiste un intorno aperto U di p tale che: $U \cap A = \emptyset$, ossia:

$\boxed{p \notin \bar{A}}$. Di conseguenza: $A = \bar{A}$ è chiuso.

<u>Corollario</u>: Sia X uno spazio topologico <u>compatto</u>. Ogni funzione <u>continua</u>

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

ammette massimo e minimo.

<u>Dim.</u> $f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$ e quindi è chiuso e limitato.

Teorema Un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

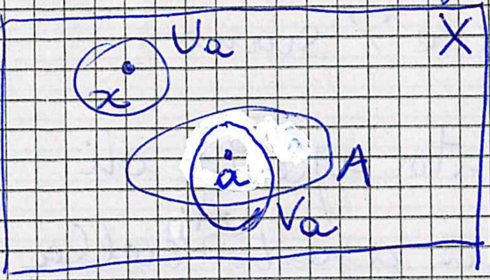
Dim. Sia X uno sp. top. di Hausdorff e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme compatto.

Se $A = \emptyset$ oppure $A = X$, il teorema è vero.

Supponiamo che A sia un sottoinsieme proprio.

Proveremo che A è chiuso facendo vedere che il complementare $X - A$ è aperto.

Fissiamo un punto $x \in X - A$. Dato che



X è di Hausdorff, per ogni $a \in A$ esistono due aperti di X U_a e V_a tali che:

$$x \in U_a, \quad a \in V_a$$

e

$$U_a \cap V_a = \emptyset.$$

La famiglia $\{V_a / a \in A\}$ ricopre A, che è compatto. Quindi, esisterà un sottoricoprimento finito tale che:

$$A \subseteq V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}.$$

Consideriamo l'aperto:

$$U \overset{\text{def.}}{=} U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$$

Si ha:

$$x \in U \quad e \quad U \cap V_{a_i} = \emptyset, \; i = 1, \dots, n.$$

Quindi U è un intorno aperto di x contenuto in $X - A$, ossia A è chiuso.

Teorema Due spazi topologici X e Y sono compatti se e solo se il loro prodotto $X \times Y$ è compatto.

Ovviamente il Teorema vale anche per un numero finito di spazi.

Dim. Se $X \times Y$ è compatto, allora le sue immagini mediante le proiezioni
$$X = p(X, Y) \quad , \quad Y = q(X, Y)$$
sono compatte.

Viceversa, supponiamo che X e Y siano compatti.

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Sappiamo che ogni aperto A_i della topologia prodotto è unione di aperti della base canonica, ossia:
$$(*) \quad A_i = \bigcup_{j \in J} (U_{i,j} \times V_{i,j})$$
dove: $U_{i,j}$ è un aperto di X e
$V_{i,j}$ è un aperto di Y.

Quindi, la famiglia $\mathcal{R} = \{ U_{i,j} \times V_{i,j} \,/\, (i,j) \in I \times J \}$ è un ricoprimento aperto di $X \times Y$.

Sia $\boxed{x \in X}$. Dato che il sottospazio $\{x\} \times Y$ è omeomorfo a Y, anche $\{x\} \times Y$ è compatto. Dato che $\mathcal{R}$ è anche un ricoprimento di $\{x\} \times Y$, si può ricoprire $\{x\} \times Y$ con un sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$.

Ciò significa che esiste un sottoinsieme

finito di indici $\boxed{I(x)} \subseteq I \times J$, tale che
$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{(i,j) \in \boxed{I(x)}} (U_{i,j} \times V_{i,j}).$$

Definiamo:
$$U_x = \bigcap_{(i,j) \in \boxed{I(x)}} U_{i,j}.$$

La famiglia $\{U_x / x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, che è compatto per ipotesi. Quindi, esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ che ricopre X:
$$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Consideriamo ora l'unione $\boxed{\text{finita}}$ di indici:
$$K \overset{\text{def.}}{=} I(x_1) \cup \dots \cup I(x_n)$$

Sia $\boxed{(x,y) \in X \times Y}$. Allora:
$$x \in X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n},$$

quindi esiste $1 \leq p \leq n$ tale che:
$$x \in U_{x_p}.$$

Inoltre:
$$(x_p, y) \in \{x_p\} \times Y \subseteq \bigcup_{(i,j) \in I(\ )} (U_{i,j} \times V_{i,j}).$$

Ciò implica che esiste un indice
$$(i', j') \in I(x_p) \subseteq K$$
tale che:
$$y \in V_{i',j'}.$$

Dato che:

$$x \in U_{x_p} = \bigcap_{(i,j)\in I(x_p)} U_{i,j} \subseteq U_{i',j'}$$

(poiché $(i',j')\in I(x_p)$), si ha infine:

$$(x,y) \in U_{i',j'} \times V_{i',j'} \subseteq A_{j'} \quad (\text{per } (*))$$

Essendo $K = I(x_1)\cup \ldots \cup I(x_n)$ finito e

$$(i',j') \in I(x_p) \subseteq K,$$

si ha che la famiglia $\{A_{j'}\}$ è un sottoricoprimento finito di $X\times Y$.

Conseguenze:

1) Abbiamo visto che $I(a) = [-a, a]$, $\underbrace{\ }_{a>0}$ è compatto in $\mathbb{R}$ e quindi anche l'(iper-)cubo

$$I^n(a) \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{I(a)\times \ldots \times I(a)}_{n\text{-volte}}$$

è compatto in $\mathbb{R}^n$.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato se esiste $r_0 > 0$, tale che

$$A \subseteq B(0; r_0),$$

ossia: se $x\in A$, allora $d(x,0) < r_0$.

Vale il:

Teorema (di Heine - Borel) Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dim. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato.

Allora, per qualche $r > 0$, si ha:

$$A \subseteq B(0; r) \subseteq I^n(r).$$

Dato che A é chiuso e contenuto nel compatto $I^n(r)$, anche A é compatto.

Viceversa, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é compatto, consideriamo la funzione continua:

$$d_0 : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto d_0(x) \overset{\text{def.}}{=} \|x\|$$

(d_0: distanza di x dall'origine).

Si sa che d_0 ammette massimo (perché é continua) e quindi A é limitato.

Dato che $\mathbb{R}^n$ é di Hausdorff, per un Teorema precedente si ha che A é anche chiuso.

Oss. Le sfere S^n ed i "dischi" $D^n = S^n \cup (\partial S^n)$ sono compatti in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2) Teorema Sia $f : X \to Y$ continua e siano:

X compatto e Y di Hausdorff.

Allora f é chiusa. Inoltre se f é anche biettiva allora f é un omeomorfismo.

Dim. Sia $A \subseteq X$ un chiuso. Dato che X é compatto, anche A é compatto. Quindi $f(A)$ é compatto in Y. Dato che Y é di Hausdorff, $f(A)$ é anche chiuso.

Supponiamo che $f : X \to Y$ sia biettiva e sia

$$g = f^{-1} : Y \to X$$ la funzione inversa.

Proviamo che g é continua.

Sia C un chiuso di Y, allora:

$$g^{-1}(C) = f(C)$$

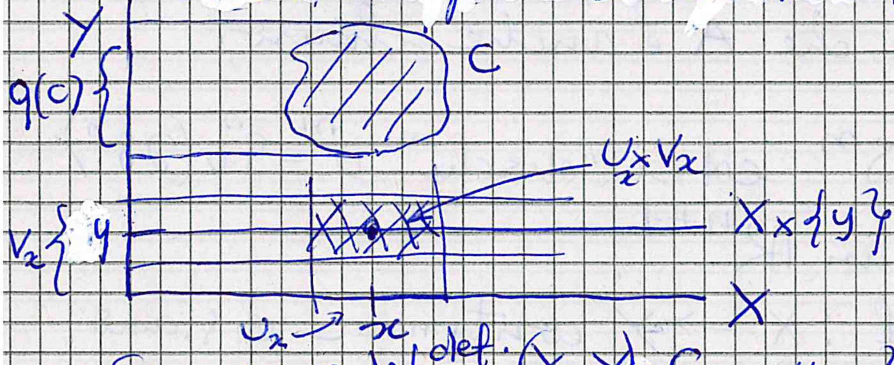
é chiuso in Y poiché f é chiusa.

<u>Teorema</u> Siano X e Y sp. topologici.
Se X é <u>compatto</u>, la proiezione

$$q : X \times Y \longrightarrow Y$$

sul <u>secondo</u> fattore, é chiusa.

<u>Dim.</u> Sia $C \subseteq X \times Y$ un chiuso.
Proveremo che $q(C)$ é chiuso facendo vedere che il suo complementare $Y - q(C)$ é aperto.



Sia $y \in W \overset{\text{def.}}{=} (X \times Y) - C$ un punto fissato.

Dato che C é chiuso, W é aperto.

Dato $x \in X$, ovviamente $(x, y) \in X \times \{y\} \subseteq W$.

Dato che W é aperto, esistono:

U_x aperto di X, V_x aperto di Y

tali che

$$x \in U_x, \quad y \in V_x, \quad U_x \times V_x \subseteq W.$$

Al variare di $x \in X$, la famiglia

$$\{U_x \times V_x \;/\; x \in X\}$$

ricopre $X \times \{y\}$, che è compatto perché omeomorfo a X, compatto per ipotesi. Quindi esiste un sottoricoprimento finito tale che

$$X \times \{y\} \subseteq (U_{x_1} \times V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_n} \times V_{x_n})$$

$$\subseteq W \quad (\text{ogni } U_x \times V_x \subseteq W)$$

Inoltre, dato che la famiglia $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ ricopre X, allora

$$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Consideriamo, l'aperto di Y:

$$V \overset{\text{def}}{=} V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$$

Ovviamente: $y \in V$ e

$$X \times V = (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}) \times (V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n})$$

$$\subseteq (U_{x_1} \times V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_n} \times V_{x_n})$$

$$\subseteq \underset{(X \times Y) - C}{\underset{\parallel}{W}} \quad (\text{come prima: ogni } U_x \times V_x \subseteq W)$$

Ciò implica che: $V \cap q(C) = \emptyset$.

ossia: V è un intorno aperto di y contenuto nel complementare di $q(C)$ e quindi $Y - q(C)$ è aperto.

<u>Oss.</u> 1) Se X e Y sono compatti, le due proiezioni di $X \times Y$ sono chiuse.

2) Vale il viceversa del teorema precedente.

Più precisamente, si ha:

Teorema (Kuratowski)

Uno spazio topologico X è compatto se e solo se la proiezione $q: X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa.

Topologia quoziente

Siano: X spazio topologico

Y insieme

$f: X \longrightarrow Y$ una funzione $\boxed{\text{suriettiva}}$

Vogliamo definire una topologia su Y in modo tale da rendere f continua.

Def. La topologia quoziente su Y è la topologia più fine che rende f continua.

Teorema Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi di Y definita da:

$A \in \mathcal{T}$ se $f^{-1}(A)$ è un $\boxed{\text{aperto di } X}$.

Allora $\mathcal{T}$ è la topologia quoziente su Y.

Dim. a) Verifichiamo che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y:

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, $X = f^{-1}(X)$ (perché f è suriettiva)
- Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{T}$, cioè $f^{-1}(A_i)$ è un aperto di X, $\forall i \in I$.

Allora:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \text{ è un}$$

aperto di X e quindi $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

- Siano $A_1, \dots, A_n$ elementi di $\mathcal{T}$. Allora

$$f^{-1}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-1}(A_n)$$

è un aperto di X e quindi $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{T}$.

b) Y con la topologia $\mathcal{T}$ rende $f: X \to Y$ continua: ovvio per definizione di X.

c) Verifichiamo che $\mathcal{T}$ è la topologia più fine su X che rende $f: X \to Y$ continua.

Sia $\mathcal{T}'$ una topologia su Y che rende $f: X \to Y$ continua.

Se $A' \in \mathcal{T}'$, allora $f^{-1}(A')$ è un aperto di X (f continua) $\Rightarrow A' \in \mathcal{T}$ (definizione di $\mathcal{T}$) $\Rightarrow \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

<u>Def.</u> Se $f: X \to Y$ è una funzione <u>continua</u> e <u>suriettiva</u> e Y ha la <u>topologia quoziente</u>, allora f si dice <u>identificazione</u>.

Oss. 1) Una identificazione è il concetto "duale" di immersione.

2) Per definizione,

a) $A \subseteq Y$ è un aperto nella topologia quoziente se e solo se $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

b) Si prova che (esercizio)

$C \subseteq Y$ è un chiuso nella topologia quoziente se e solo se $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

Esempio (fondamentale!)

Siano: X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X

Se $x \in X$, indichiamo con

$$[x] = \{x' \in X \mid x \sim x'\}$$

la classe di equivalenza individuata da x.

Le classi di equivalenza formano una partizione di X.

Siano: $X/_{\sim}$ l'insieme quoziente, cioè l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim \quad \text{la } \underline{\text{proiezione}}$$
$$x \longmapsto \pi(x) \overset{\text{def.}}{=} [x] \quad \underline{\text{canonica}}$$

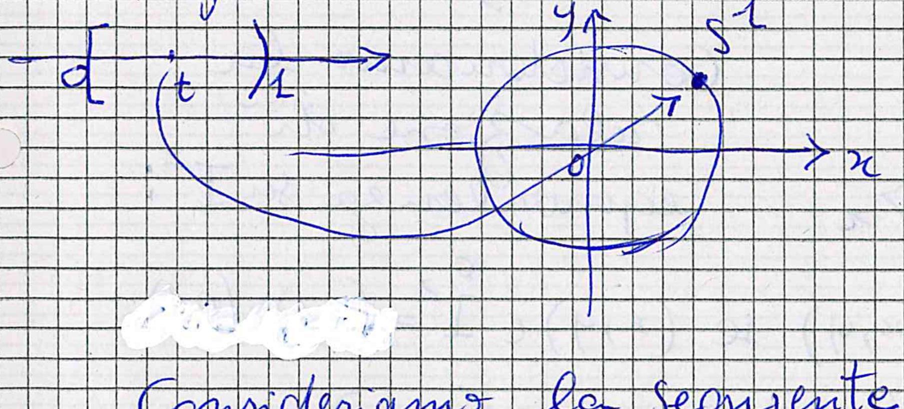
π é suriettiva: consideriamo su $X/\sim$ la topologia quoziente indotta da π. Ciò significa che:

$A \subseteq X/\sim$ é aperto se e solo se

$$\pi^{-1}(A) = \{ x \in X \,/\, [x] \in A \}$$
$$= \{ x \in X \,/\, x \sim x', \text{con } [x'] \in A \}$$

Esempi

1) Abbiamo visto che $[0, 1)$ é in biezione con la circonferenza S^1 del piano ma non é omeomorfa a S^1



Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $X = [0, 1]$:

Dati $t, t' \in [0, 1]$

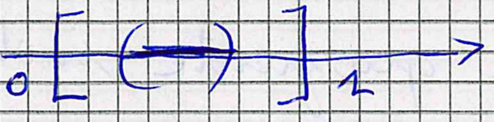
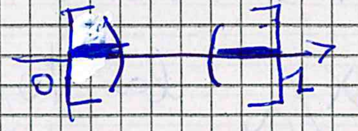
$t \sim t'$ se $t = 0$ e $t' = 1$ (ossia: $0 \sim 1$)

$t \sim t$ se $t \neq 0$ e $t \neq 1$

Notare che: $\sim$ "identifica" 0 e 1.

Sia $X/\sim$ l'insieme quoziente con la topologia quoziente

(I suoi aperti sono del tipo

 oppure )

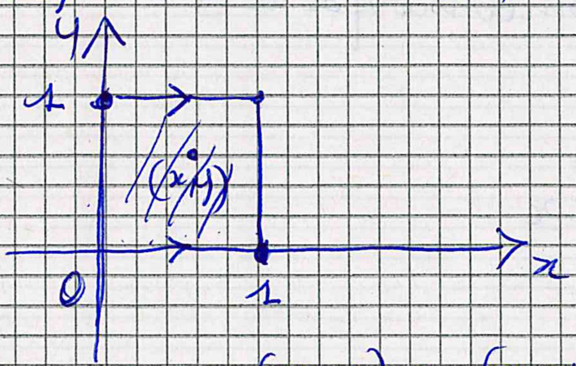
La funzione

$$\tilde{f} : X/\sim \longrightarrow S^1$$
$$[t] \longmapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

è un <u>omeomorfismo</u>.

Notare che $\tilde{f}$ è "ben definita", cioè il suo valore non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza.

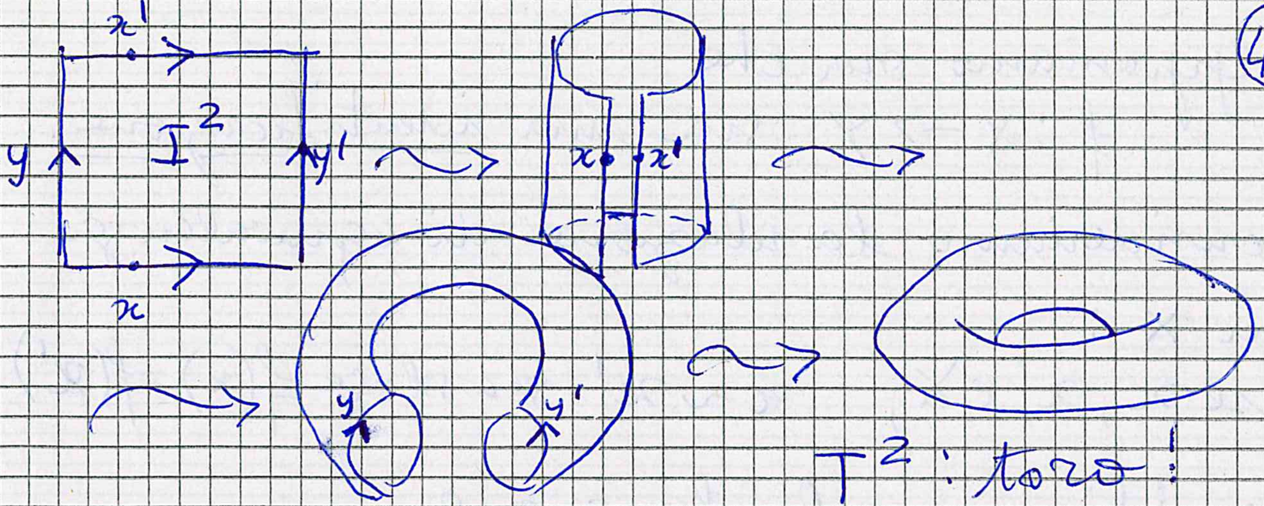
2) Sia $I^2 \stackrel{def.}{=} [0,1] \times [0,1]$ il quadrato unitario



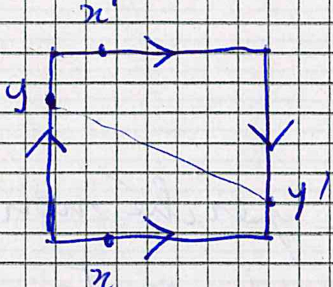
Consideriamo la relazione di equivalenza su I^2:

- $(x,y) \sim (x,y)$ se $(x,y) \in \mathring{I}^2 = (0,1) \times (0,1)$
- $(x,0) \sim (x,1)$ se $x \in (0,1)$
- $(0,y) \sim (1,y)$ se $y \in (0,1)$
- $(0,0) \sim (1,0) \sim (1,1) \sim (0,1)$

Chi è $X = I^2/\sim$?



T^2 : toro!

3) 

$\rightsquigarrow$ ... Nastro di Möebius!

4) Consideriamo lo spazio tridimensionale privato dell'origine: $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ e definiamo la seguente relazione di equivalenza:

Se $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, allora

$\vec{x} \sim \vec{x}'$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,
tale che $\vec{x}' = t\vec{x}$

(cioè $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ sono in relazione individuano la stessa retta vettoriale).

Allora:
$$\mathbb{R}^3 - \{0\} \Big/ \sim$$ ha come <u>elementi</u> le rette vettoriali (private dell'origine):
è il <u>piano proiettivo</u> P^2.

Supponiamo ora che

$f : X \to Y$ sia una identificazione.

Consideriamo la relazione di equivalenza su X:

se $x, x' \in X$, $x \sim x'$ se e solo se $f(x) = f(x')$

e definiamo la funzione

$$\tilde{f} : X/_{\sim} \longrightarrow Y$$
$$[x] \longmapsto f(x)$$

Notare che: $\tilde{f}$ è ben definita perché non dipende dall'elemento che rappresenta la classe.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad f = \tilde{f} \circ \pi$$

Teorema $\quad f : X/_{\sim} \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo.

Quindi: ogni identificazione è la proiezione canonica di una relazione di equivalenza.