Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 4 - 29 ottobre 2018

Ricordare che:

1. Se $A \subseteq X$ è aperto (chiuso), allora la proiezione sul quoziente (contrazione ad un punto) $p : X \to X/A$ è aperta (chiusa).
2. Se X è compatto e Hausdorff, $f : X \to Y$ identificazione (Y è un quoziente), allora Y Hausdorff se e solo se f è chiusa.

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottospazi compatti.

1. Dimostrare che $A \cup B$ è compatto.
2. Se X è di Hausdorff, dimostrare che $A \cap B$ è compatto.
3. Trovare un esempio in cui $A \cap B$ non è compatto

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ con la topologia euclidea. Poniamo $Z = X \times \{0\} \subseteq X \times I$. Indichiamo con Y il quoziente $(X \times I)/Z$ (cioè modulo la relazione di equivalenza che identifica Z ad un punto). Lo spazio Y viene solitamente chiamato il *cono* su X.

1. Dimostrare che Y è connesso per archi.
2. Dimostrare che se X è compatto allora Y è compatto
3. Dimostrare che se X è compatto e di Hausdorff, allora Y è di Hausdorff.

Esercizio 3. Mostrare che, al variare di A fra i sottoinsiemi dell'intervallo $[0, 1]$ formati da due punti distinti, lo spazio quoziente $[0, 1]/A$ può assumere tre diverse classi di omeomorfismo.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea, consideriamo i seguenti sottoinsiemi:

- $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

Per ognuno dei seguenti spazi topologici dire se è di Hausdorff, compatto, connesso, connesso per archi, motivando la risposta:

(a) $X = \mathbb{R}^2/C$

(b) $Y = \mathbb{R}^2/(C \cup F)$

(c) $W = \mathbb{R}^2/F$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si considerino i sottospazi:

$$A = \{(x, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{(x, y) \mid y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione continua $g : A \to B$ definita da

$$g(x, n) = \left(x, \frac{x}{n}\right).$$

1. A è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
2. B è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
3. Sia $C = \{(x, 1) \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$; C è chiuso in A? $g(C)$ è chiuso in B?
4. Sia $D = \{(x, 1) \in A \mid -1 < x < 1\}$; D è aperto in A? $g(D)$ è aperto in B?

Esercizio 6. Sia $X = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea e sia

$$Y = \{A \in X \mid A^2 = I\}$$

dove I è la matrice identità.

1. dimostrare che Y è chiuso
2. dimostrare che Y non è compatto
3. Y è connesso? (suggerimento: osservare che $Y \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$).