Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 5 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 13 novembre

Esercizio 1. *(Esercizio 5.11. del Manetti)* Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottoinsieme compatto e X/K la contrazione di K ad un punto. Dimostrare che X/K è di Hausdorff.

Esercizio 2. *(Esercizio 5.18. del Manetti)* Pensando $\mathbb{RP}^1$ come il quoziente $(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{R}^*$, indichiamo con $[x_0, x_1] \in \mathbb{RP}^1$ la classe di equivalenza del vettore non nullo $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Quindi $[x_0, x_1]$ significa un vettore non nullo determinato a meno di proporzionalità.

Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{RP}^1 \to S^1$ data da

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

Esercizio 3. (Manetti, Esercizio 6.7) Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione biunivoca (qualunque!) fra i numeri naturali e i numeri razionali, cioè:

1. $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. a è iniettiva e l'immagine $a(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$.

Pensando alla funzione a come ad una successione a valori reali, determinare i punti di accumulazione.

Suggerimento (di Manetti): ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.

Esercizio 4. (esercizio 1 dallo scritto di luglio 2018) Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \le a \le 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.

(c) Dimostrare che la chiusura di $A = [1, 3/2]$ è $[1, 2)$ e che l'interno di A è l'insieme vuoto.

(d) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff.

(e) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è separabile.