Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 5 - 5 novembre 2018

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea. Poniamo $Z = X \times \{0\} \subseteq X \times I$. Indichiamo con Y il quoziente $(X \times I)/Z$ (cioè modulo la relazione di equivalenza che identifica Z ad un punto). Lo spazio Y viene solitamente chiamato il *cono* su X.

1. Dimostrare che Y è connesso per archi.
2. Dimostrare che se X è compatto allora Y è compatto
3. Dimostrare che se X è compatto e di Hausdorff, allora Y è di Hausdorff.

Esercizio 2. (Manetti, Esempio 5.10) Sia $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria (pensata come numeri complessi di norma 1) e sia $X = S^1 \times [0,1]$. Definiamo la seguente relazione su X

$$(x,t) \sim (y,s) \iff tx = sy$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $X/\sim$ è omeomorfo al disco unitario chiuso $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

N.B. $X/\sim$ è il cono su S^1. L'enunciato analogo con $X = S^n \times [0,1]/\sim$ omeomorfo alla palla chiusa D^{n+1} si dimostra allo stesso modo e cioè: Il cono sulla sfera unitaria S^n è la palla chiusa D^{n+1}.

Esercizio 3. Siano X e Y due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0,1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x,y,t) \sim (x',y',t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1, 1\}$ la sfera di dimensione 0 e S^1 la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?

Esercizio 4. Una funzione continua $f : X \to Y$ è detta *propria* se per ogni compatto $K \subseteq Y$ la controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.

Sia ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua propria (la topologia su $\mathbb{R}$ è quella euclidea). Dimostrare che $f(\mathbb{N})$ non è limitato.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e propria. Dimostrare che f è chiusa.

Esercizio 6. Sia $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il gruppo di omeomorfismi di S^1 in sé generato dalla moltiplicazione per -1. Dimostrare che il quoziente S^1/G è omeomorfo a S^1. Fare lo stesso con il gruppo ciclico C_n, generato dalla rotazione di $2\pi/n$. Dire qualche parola su $\mathbb{C}$

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $x \in X$ un punto. Si dice che x è un *punto di accumulazione per* A se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x. (Questa è esattamente la definizione data nel corso di Analisi UNO).

Dimostrare che $x \in X$ è un punto di accumulazione per una successione $\{a_n\}$ se e solo se il punto $(x, 0) \in X \times [0, 1]$ è un punto di accumulazione per il sottoinsieme $A = \{(a_n, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times [0, 1]$.